Exercice 1 — Trois dérivées

3 points

1) $f = u^2$ avec $u(x) = 3x^2 - 1$ et $u'(x) = 6x$. Comme $\left(u^2\right)' = 2u'u$: $f'(x) = 2 \times 6x \times \left(3x^2 - 1\right)$, soit $\boxed{f'(x) = 12x\left(3x^2 - 1\right)}$.

2) $g = 4\,\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -0{,}5x + 2$ et $u'(x) = -0{,}5$. Comme $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\,\mathrm{e}^u$: $g'(x) = 4 \times (-0{,}5)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x+2}$, soit $\boxed{g'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-0{,}5x+2}}$.

3) $h = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2 - 2x$ et $u'(x) = 2x - 2$. Donc $\boxed{h'(x) = (2x-2)\,\mathrm{e}^{x^2-2x}}$.

Exercice 2 — Un tableau à compléter

2,5 points

1) $f = uv$ avec $u(x) = (x-2)^2$, $u'(x) = 2(x-2)$, $v(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Donc

$$f'(x) = 2(x-2)\,\mathrm{e}^x + (x-2)^2\,\mathrm{e}^x = (x-2)\,\mathrm{e}^x\left[2 + (x-2)\right] = \boxed{x(x-2)\,\mathrm{e}^x}.$$

2) $f(-1) = 9\,\mathrm{e}^{-1} \approx 3{,}31$; $f(0) = 4\,\mathrm{e}^0 = 4$; $f(1) = \mathrm{e} \approx 2{,}72$; $f(2) = 0$; $f(3) = \mathrm{e}^3 \approx 20{,}09$.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\approx 3{,}31$	4	$\approx 2{,}72$	0	$\approx 20{,}09$

3) Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x(x-2)$, trinôme de racines 0 et 2, positif à l'extérieur des racines : $f'(x) > 0$ sur $[-1\,;0[$ et sur $]2\,;3]$, $f'(x) < 0$ sur $]0\,;2[$.

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\approx 3{,}31$	↗	4	↘	0	↗	$\approx 20{,}09$

Exercice 3 — Lire un tableau de variations

2,5 points

1) On applique le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle où g est continue et strictement monotone :

- sur $[-2\,;1]$, g décroît de 5 à -3 et $-3 < 1 < 5$: une solution ;
- sur $[1\,;4]$, g croît de -3 à 3 et $-3 < 1 < 3$: une solution ;
- sur $[4\,;6]$, g décroît de 3 à 0 et $0 < 1 < 3$: une solution.

L'équation $g(x) = 1$ admet exactement trois solutions sur $[-2\,;6]$.

2) Sur $[-2\,;1]$, g est strictement décroissante et $g(-1) = 3$: $g(x) \leqslant 3$ si et seulement si $x \geqslant -1$, soit $x \in [-1\,;1]$.

Sur $[1\,;6]$, la plus grande valeur de g est $g(4)=3$: $g(x)\leqslant 3$ pour tout $x\in[1\,;6]$.
L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}=[-1\,;6]}$.

3) D'après le tableau, le maximum de g sur $[-2\,;6]$ est $g(-2)=5$. Comme $7>5$, $\boxed{\text{l'équation } g(x)=7 \text{ n'a aucune solution}}$.

Exercice 4 — Vrai ou faux ?

4 points

1) **Faux.** Contre-exemple : $k(-1)=\mathrm{e}^{-1}\approx 0{,}37$ et $k(0)=\mathrm{e}^{0}=1$; on a $-1<0$ et $k(-1)<k(0)$, ce qui est impossible pour une fonction décroissante.
Plus précisément : $k'(x)=-2x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ est positif sur $]-\infty\,;0]$: k est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

2) **Vrai.** Un carré est positif ou nul : $u'(x)=(x-1)^2\geqslant 0$ pour tout réel x, et u' ne s'annule qu'en $x=1$. Une fonction dont la dérivée est positive sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ (même strictement, la dérivée ne s'annulant qu'en un point).

3) **Vrai.** $m(0)=\mathrm{e}^{0}=1$ et $m'(x)=2\,\mathrm{e}^{2x}$, donc $m'(0)=2$. La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y=m'(0)(x-0)+m(0)=2x+1$.

4) **Faux.** $p=u^2$ avec $u(x)=3x+1$ et $u'(x)=3$: $p'(x)=2\times 3\times(3x+1)=6(3x+1)$, et non $2(3x+1)$. Par exemple $p'(0)=6$ alors que $2(3\times 0+1)=2$.
Vérification : $p(x)=9x^2+6x+1$, donc $p'(x)=18x+6=6(3x+1)$.

Exercice 5 — La cuve qui se vide

5 points

1) $h(0)=(1-0)^2=\boxed{1}$: à l'ouverture du robinet, la hauteur d'eau est de 1 m.
$h(50)=(1-0{,}02\times 50)^2=(1-1)^2=\boxed{0}$: la cuve est vide au bout de 50 minutes.

2) $h=u^2$ avec $u(t)=1-0{,}02t$ et $u'(t)=-0{,}02$. Comme $\left(u^2\right)'=2u'u$:

$$h'(t)=2\times(-0{,}02)\times(1-0{,}02t)=\boxed{-0{,}04\,(1-0{,}02t)}.$$

3) Pour $t\in[0\,;50]$, $0{,}02t\leqslant 1$ donc $1-0{,}02t\geqslant 0$, et $h'(t)\leqslant 0$ (h' ne s'annule qu'en $t=50$).
$\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;50]}$: la hauteur d'eau diminue.

t	0		50
$h'(t)$		$-$	0
h	1	↘	0

4) $h'(0)=-0{,}04\times 1=\boxed{-0{,}04}$ et $h'(40)=-0{,}04\times(1-0{,}8)=-0{,}04\times 0{,}2=\boxed{-0{,}008}$.
À l'ouverture, la hauteur baisse d'environ 4 cm par minute ; au bout de 40 minutes, de $0{,}8$ cm

par minute seulement : la cuve se vide de moins en moins vite. En effet, le débit du robinet dépend de la pression au fond de la cuve, donc de la hauteur d'eau : moins il reste d'eau, plus l'écoulement est lent.

5) Sur $[0\,;50]$, h est continue (car dérivable) et strictement décroissante, de 1 à 0 ; comme $0 < 0{,}5 < 1$, l'équation $h(t) = 0{,}5$ admet une unique solution t_1.
Pour $t \in [0\,;50]$, $1 - 0{,}02t \geqslant 0$, donc

$$h(t) = 0{,}5 \iff (1-0{,}02t)^2 = 0{,}5 \iff 1-0{,}02t = \sqrt{0{,}5} \iff t = \frac{1-\sqrt{0{,}5}}{0{,}02} = 50\left(1-\sqrt{0{,}5}\right).$$

$t_1 = 50\left(1-\sqrt{0{,}5}\right) \approx 14{,}6$ min.
Comparaison : la cuve perd la moitié de sa hauteur en $14{,}6$ minutes, soit moins de $30\,\%$ des 50 minutes de vidange ; la seconde moitié de la hauteur demande plus de 35 minutes.

6) $h(t) = 0{,}25 \iff (1-0{,}02t)^2 = 0{,}25 \iff 1-0{,}02t = 0{,}5 \iff t = \dfrac{0{,}5}{0{,}02} = 25.$
La cuve est au quart de sa hauteur initiale au bout de 25 minutes, c'est-à-dire à la moitié de la durée de vidange.

Exercice 6 — Trois lectures graphiques

3 points

1) Le point A a pour coordonnées $(0\,;2)$: $f(0) = 2$.
$f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente T : en partant de $A(0\,;2)$, lorsque x augmente de 1, y diminue de 3 (la droite passe par $(1\,;-1)$). Donc $f'(0) = -3$.

2) La courbe monte sur $[-3\,;-1]$, descend sur $[-1\,;3]$ puis remonte sur $[3\,;5]$. On lit $f(-3) = -7$, $f(-1) \approx 3{,}7$, $f(3) = -7$ et $f(5) \approx 3{,}7$.

x	-3		-1		3		5
f	-7	↗	$\approx 3{,}7$	↘	-7	↗	$\approx 3{,}7$

3) Les solutions de $f(x) = 2$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 2 : la droite horizontale $y = 2$ coupe la courbe en trois points (abscisses environ $-1{,}9$, 0 et $4{,}9$) : trois solutions.
La plus petite valeur prise par f sur $[-3\,;5]$ est -7 ; comme $-8 < -7$, la droite $y = -8$ ne coupe pas la courbe : l'équation $f(x) = -8$ n'a aucune solution.