Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 — Trois dérivées

3 points

Pour chacune des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, calculer la dérivée.

1) $f(x) = \left(3x^2 - 1\right)^2$

2) $g(x) = 4\,\mathrm{e}^{-0{,}5x+2}$

3) $h(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$

Exercice 2 — Un tableau à compléter

2,5 points

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;3]$ par $f(x) = (x-2)^2\,\mathrm{e}^x$.

1) Montrer que, pour tout $x \in [-1\,;3]$, $f'(x) = x(x-2)\,\mathrm{e}^x$.

2) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir au centième).

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

3) Dresser le tableau de variations de f sur $[-1\,;3]$.

Exercice 3 — Lire un tableau de variations

2,5 points

On donne ci-contre le tableau de variations d'une fonction g définie et continue sur $[-2\,;6]$. On précise que $g(-1) = 3$.

x	-2		1		4		6
g	5	↘	-3	↗	3	↘	0

1) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 1$ sur $[-2\,;6]$.

2) Résoudre l'inéquation $g(x) \leqslant 3$ sur $[-2\,;6]$.

3) L'équation $g(x) = 7$ admet-elle des solutions sur $[-2\,;6]$?

Exercice 4 — Vrai ou faux ?

4 points

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) La fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2) Si une fonction u dérivable sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée $u'(x) = (x-1)^2$, alors u est croissante sur $\mathbb{R}$.

3) La tangente à la courbe de la fonction $m : x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 2x + 1$.

4) La fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (3x+1)^2$ a pour dérivée $p'(x) = 2(3x+1)$.

Exercice 5 — La cuve qui se vide

5 points

Une cuve de récupération d'eau de pluie, de section constante, contient 1 m d'eau. On ouvre le robinet de vidange situé au fond. La hauteur d'eau, en mètres, t minutes après l'ouverture, est modélisée (loi de Torricelli) par

$$h(t) = (1 - 0{,}02t)^2, \qquad t \in [0\,;50].$$

1) Calculer $h(0)$ et $h(50)$. Interpréter.

2) Montrer que, pour tout $t \in [0\,;50]$, $h'(t) = -0{,}04\,(1 - 0{,}02t)$.

3) Étudier le signe de $h'(t)$ sur $[0\,;50]$ et dresser le tableau de variations de h.

4) Calculer $h'(0)$ et $h'(40)$. Comment évolue la vitesse à laquelle la cuve se vide ? Expliquer ce phénomène.

5) Justifier que l'équation $h(t) = 0{,}5$ admet une unique solution t_1 sur $[0\,;50]$, puis déterminer t_1 par le calcul (arrondir au dixième). Comparer t_1 à la durée totale de la vidange.

6) Au bout de combien de minutes la cuve est-elle au quart de sa hauteur initiale ?

Exercice 6 — Trois lectures graphiques

3 points

On a tracé ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $[-3\,;5]$, ainsi que sa tangente T au point A d'abscisse 0.

1) Lire $f(0)$ et $f'(0)$.

2) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3\,;5]$ (valeurs lues sur le graphique).

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$, puis celui de l'équation $f(x) = -8$.

