Exercice 1

7,5 points

1) **a.** $f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 3x - 1$ et $u'(x) = 3$. Comme $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$: $\boxed{f'(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x-1}}$.

b. $g = u^2$ avec $u(x) = x^2 - 4x$ et $u'(x) = 2x - 4$. Comme $\left(u^2\right)' = 2u'u$:

$$g'(x) = 2(2x-4)\left(x^2-4x\right) = 2 \times 2(x-2) \times x(x-4) = \boxed{4x(x-2)(x-4)}.$$

c. $h = uv$ avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1$, $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ et $v'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x}$ (dérivée de e^{ax+b} avec $a = -2$) :

$$h'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-2x} + x \times \left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right) = \boxed{(1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}}.$$

2) La tangente au point d'abscisse $a = \dfrac{1}{3}$ a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \mathrm{e}^{3\times\frac{1}{3}-1} = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3\,\mathrm{e}^0 = 3$. Donc

$$y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right) + 1 = 3x - 1 + 1, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = 3x}.$$

Exercice 2

12,5 points

1) Le volume vaut 250π : $\pi r^2 h = 250\pi$. En divisant par $\pi r^2 \neq 0$: $\boxed{h = \dfrac{250}{r^2}}$.

2) L'aire totale est la somme des aires du fond et du couvercle (deux disques de rayon r) et de l'aire latérale :

$$A = 2 \times \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{250}{r^2} = \boxed{2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}}.$$

3) $A(1) = 2\pi + 500\pi = 502\pi$; $A(2) = 8\pi + 250\pi = 258\pi$; $A(5) = 50\pi + 100\pi = 150\pi$; $A(10) = 200\pi + 50\pi = 250\pi$.

r	1	2	5	10
$A(r)$	502π	258π	150π	250π

4) La dérivée de $r \longmapsto \dfrac{500\pi}{r} = 500\pi \times \dfrac{1}{r}$ est $r \longmapsto -\dfrac{500\pi}{r^2}$. Donc, pour $r \in [1\,;10]$,

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} = \frac{4\pi r \times r^2 - 500\pi}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 500\pi}{r^2} = \boxed{\frac{4\pi\left(r^3 - 125\right)}{r^2}}.$$

5) La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $5^3 = 125$: pour $r \in [1\,;10]$, $r^3 - 125 < 0$ si $r < 5$, $r^3 - 125 = 0$ si $r = 5$ et $r^3 - 125 > 0$ si $r > 5$.
Comme $\dfrac{4\pi}{r^2} > 0$, $A'(r)$ est du signe de $r^3 - 125$.

r	1		5		10
$A'(r)$		$-$	0	$+$	
A	502π	↘	150π	↗	250π

6) A admet un minimum en $r = 5$: la boîte la plus économe a pour rayon $\boxed{r = 5 \text{ cm}}$ et pour hauteur $h = \dfrac{250}{5^2} = \boxed{10 \text{ cm}}$; son aire est alors 150π cm^2.
Le diamètre vaut $2r = 10$ cm : $\boxed{\text{la hauteur de la boîte optimale est égale à son diamètre}}$ (vue de profil, la boîte s'inscrit dans un carré).