Exercice 1 — L'affiche la plus économe

5 points

1) La largeur de la feuille est x ; on retire les deux marges latérales de 2 cm : la zone imprimée a pour largeur $x-2-2=x-4$. De même, en hauteur, on retire $3+3=6$ cm : sa hauteur est $y-6$.
Son aire vaut 600 cm^2 : $(x-4)(y-6)=600$, donc $y-6=\dfrac{600}{x-4}$ (car $x-4\neq 0$), soit $\boxed{y=6+\dfrac{600}{x-4}}$.

2) L'aire de la feuille est $S(x)=x\times y=x\left(6+\dfrac{600}{x-4}\right)=6x+\dfrac{600x}{x-4}$.
Or $\dfrac{600x}{x-4}=\dfrac{600(x-4)+2400}{x-4}=600+\dfrac{2400}{x-4}$. Donc $\boxed{S(x)=6x+600+\dfrac{2400}{x-4}}$.

3) S est dérivable sur $[10\,;50]$ (somme de fonctions dérivables, $x-4\neq 0$).
La dérivée de $x\longmapsto\dfrac{2400}{x-4}=2400\times\dfrac{1}{x-4}$ est $x\longmapsto-\dfrac{2400}{(x-4)^2}$. Donc

$$S'(x)=6-\frac{2400}{(x-4)^2}=\frac{6(x-4)^2-2400}{(x-4)^2}=\boxed{\frac{6\left[(x-4)^2-400\right]}{(x-4)^2}}.$$

4) Le dénominateur $(x-4)^2$ est strictement positif sur $[10\,;50]$: $S'(x)$ est du signe de $(x-4)^2-400$.
Pour $x\geqslant 10$, $x-4>0$, et la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$: $(x-4)^2\geqslant 400\iff x-4\geqslant 20\iff x\geqslant 24$.
Donc $S'(x)<0$ sur $[10\,;24[$, $S'(24)=0$ et $S'(x)>0$ sur $]24\,;50]$.
$S(10)=60+600+400=1060$; $S(24)=144+600+120=864$; $S(50)=300+600+\dfrac{2400}{46}\approx 952$.

x	10		24		50
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
S	1060	↘	864	↗	≈ 952

5) L'aire de la feuille est minimale pour $x=24$; alors $y=6+\dfrac{600}{20}=36$.
$\boxed{\text{La feuille la plus économe mesure } 24 \text{ cm sur } 36 \text{ cm}}$, pour une aire de $\boxed{S(24)=864 \text{ cm}^2}$.
La zone imprimée mesure alors 20 cm sur 30 cm.

Exercice 2 — Rembourser un emprunt

8 points

Partie A. Les premières années

1) $D(0)=225-75\,\mathrm{e}^0=225-75=\boxed{150}$: au départ, le capital restant dû est bien de $150\,000$ €.
$D(10)=225-75\,\mathrm{e}^{0,4}\approx\boxed{113{,}11}$: après 10 ans, il reste environ $113\,110$ € à rembourser.
Le capital remboursé est $150-113{,}11=36{,}89$, soit $\boxed{\text{environ } 36\,890 \text{ €}}$.

2) $D = 225 - 75\,\mathrm{e}^{u}$ avec $u(t) = 0{,}04t$ et $u'(t) = 0{,}04$. Comme $(\mathrm{e}^{u})' = u'\,\mathrm{e}^{u}$:

$$D'(t) = -75 \times 0{,}04\,\mathrm{e}^{0{,}04t} = \boxed{-3\,\mathrm{e}^{0{,}04t}}.$$

Une exponentielle est strictement positive, donc $D'(t) < 0$ pour tout $t \in [0\,;30]$:
$\boxed{D \text{ est strictement décroissante sur } [0\,;30]}$ (le capital restant dû diminue).

3) $D'(0) = -3\,\mathrm{e}^{0} = \boxed{-3}$. Au début du prêt, le capital restant dû diminue d'environ $3\,000$ € par an. En effet, la première année, les intérêts s'élèvent à $4\,\%$ de $150\,000$ €, soit $6\,000$ € : sur les $9\,000$ € versés, seuls $9\,000 - 6\,000 = 3\,000$ € remboursent du capital.

Partie B. La fin du prêt

1) D est strictement décroissante sur $[0\,;30]$, avec $D(0) = 150$ et $D(30) = 225 - 75\,\mathrm{e}^{1{,}2} \approx -24{,}0$.

t	0		30
$D'(t)$		$-$	
D	150	↘	$\approx -24{,}0$

$D(30) < 0$: un capital restant dû négatif n'a pas de sens.
$\boxed{\text{La dette est entièrement remboursée avant } 30 \text{ ans}}$ (le modèle ne vaut que jusqu'au remboursement complet).

2) Sur $[0\,;30]$, D est continue (car dérivable) et strictement décroissante, de $D(0) = 150$ à $D(30) \approx -24{,}0$. Comme 0 est compris entre $-24{,}0$ et 150, l'équation $D(t) = 0$ admet $\boxed{\text{une unique solution } t_0 \text{ sur } [0\,;30]}$.

3) $D(27) = 225 - 75\,\mathrm{e}^{1{,}08} \approx 4{,}15 > 0$ et $D(28) = 225 - 75\,\mathrm{e}^{1{,}12} \approx -4{,}86 < 0$.
D étant strictement décroissante, t_0 est compris entre 27 et 28 : $\boxed{27 < t_0 < 28}$.
Interprétation : le prêt est entièrement remboursé au cours de la 28^{e} année ; la durée du prêt est d'un peu plus de 27 ans.

4) Le ménage verse $9\,000$ € par an pendant environ $27{,}5$ ans : $9\,000 \times 27{,}5 = \boxed{247\,500 \text{ €}}$ au total.
Il a emprunté $150\,000$ € : le coût du crédit est d'environ $247\,500 - 150\,000 = \boxed{97\,500 \text{ €}}$ d'intérêts, soit près des deux tiers du capital emprunté.

Exercice 3 — Après le repas

7 points

1) $G(0) = 1 + 1{,}2 \times 0 \times \mathrm{e}^{0} = \boxed{1}$: au moment du repas, la glycémie est de 1 g/L (glycémie à jeun).

2) $G = 1 + 1{,}2\,uv$ avec $u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v'(t) = -\mathrm{e}^{-t}$ (dérivée de e^{at+b} avec $a = -1$).
Donc

$$G'(t) = 1{,}2\left(1 \times \mathrm{e}^{-t} + t \times \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\right) = \boxed{1{,}2\,(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-t} > 0$, $G'(t)$ est du signe de $1 - t$: positif sur $[0\,;1[$, nul en 1, négatif sur $]1\,;6]$.
$G(0) = 1$; $G(1) = 1 + 1{,}2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 1{,}44$; $G(6) = 1 + 7{,}2\,\mathrm{e}^{-6} \approx 1{,}02$.

t	0		1		6
$G'(t)$		$+$	0	$-$	
G	1	↗	$\approx 1{,}44$	↘	$\approx 1{,}02$

La glycémie est maximale une heure après le repas, à environ $1{,}44$ g/L.

3) Sur $[1\,;6]$, G est continue (car dérivable) et strictement décroissante, de $G(1) \approx 1{,}44$ à $G(6) \approx 1{,}02$. Comme $1{,}02 < 1{,}1 < 1{,}44$, l'équation $G(t) = 1{,}1$ admet une unique solution α sur $[1\,;6]$.

4) Tant que la glycémie dépasse $1{,}1$, on avance de `pas` :

```
def seuil(pas):
    t = 1
    while G(t) > 1.1 :
        t = t + pas
    return t
```

5) Avec un pas de 1, les valeurs testées sont $G(1) \approx 1{,}44 > 1{,}1$, puis $G(2) = 1+2{,}4\,\mathrm{e}^{-2} \approx 1{,}32 > 1{,}1$, puis $G(3) = 1 + 3{,}6\,\mathrm{e}^{-3} \approx 1{,}18 > 1{,}1$, puis $G(4) = 1 + 4{,}8\,\mathrm{e}^{-4} \approx 1{,}09 \leqslant 1{,}1$: la boucle s'arrête et `seuil(1)` renvoie 4.
Comme $G(3) > 1{,}1 > G(4)$ et que G est strictement décroissante sur $[1\,;6]$: $3 < \alpha < 4$.

6) $G(3{,}8) = 1 + 4{,}56\,\mathrm{e}^{-3{,}8} \approx 1{,}102 > 1{,}1$ et $G(3{,}9) = 1 + 4{,}68\,\mathrm{e}^{-3{,}9} \approx 1{,}095 \leqslant 1{,}1$.
Le programme s'arrête donc à $t = 3{,}9$: `seuil(0.1)` renvoie $3{,}9$ (à l'affichage des nombres flottants près), et $3{,}8 < \alpha < 3{,}9$.
Interprétation : $0{,}8$ h $=$ 48 min et $0{,}9$ h $=$ 54 min : la glycémie repasse sous $1{,}1$ g/L environ 3 h 50 min après le repas (entre 3 h 48 et 3 h 54).