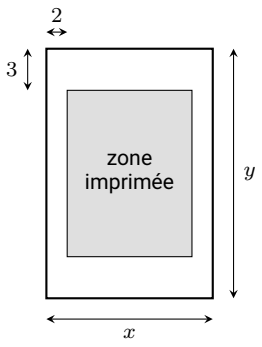
Calculatrice autorisée (mode examen)
Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1 — L'affiche la plus économe

5 points

Une association de prévention fait imprimer une affiche. La zone imprimée doit avoir une aire de 600 cm^2 ; elle est entourée de marges blanches de 2 cm à gauche et à droite, et de 3 cm en haut et en bas. On note x la largeur et y la hauteur de la feuille de papier, en cm, avec $x \in [10\,;50]$.



1) Justifier que la zone imprimée a pour dimensions $x-4$ et $y-6$, puis exprimer y en fonction de x.

2) Montrer que l'aire de la feuille, en cm^2, est

$$S(x) = 6x + 600 + \frac{2400}{x-4}.$$

3) Montrer que, pour tout $x \in [10\,;50]$,

$$S'(x) = \frac{6\left[(x-4)^2 - 400\right]}{(x-4)^2}.$$

4) Étudier le signe de $S'(x)$ sur $[10\,;50]$ et dresser le tableau de variations de S (valeurs arrondies à l'unité).

5) Quelles dimensions de la feuille utilisent le moins de papier ? Quelle est alors l'aire de la feuille ?

Exercice 2 — Rembourser un emprunt

8 points

Un ménage emprunte $150\,000$ € au taux annuel de $4\,\%$ et rembourse $9\,000$ € par an, soit 750 € par mois. On modélise le **capital restant dû**, en milliers d'euros, t années après le début du prêt, par

$$D(t) = 225 - 75\,\mathrm{e}^{0{,}04t}, \qquad t \in [0\,;30].$$

Partie A. Les premières années

1) Vérifier que $D(0) = 150$. Calculer $D(10)$ (arrondir au centième) et en déduire le montant du capital remboursé au bout de 10 ans.

2) Montrer que, pour tout $t \in [0\,;30]$, $D'(t) = -3\,\mathrm{e}^{0{,}04t}$. En déduire le sens de variation de D.

3) Calculer $D'(0)$. Interpréter ce nombre dans le contexte, sachant que la première année, les intérêts s'élèvent à $4\,\%$ de $150\,000$ €.

Partie B. La fin du prêt

1) Dresser le tableau de variations de D sur $[0\,;30]$ (valeurs arrondies au dixième). Que signifie le signe de $D(30)$?

2) Justifier que l'équation $D(t) = 0$ admet une unique solution t_0 sur $[0\,;30]$.

3) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de t_0 par deux entiers consécutifs ; justifier la réponse par deux calculs. Interpréter.

4) On admet que $t_0 \approx 27{,}5$. Estimer le montant total versé par le ménage, puis le coût du crédit (total des intérêts).

Exercice 3 — Après le repas

7 points

La glycémie d'une personne, en grammes de glucose par litre de sang, t heures après un repas, est modélisée pour $t \in [0\,;6]$ par

$$G(t) = 1 + 1{,}2\,t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

1) Calculer $G(0)$ et interpréter ce résultat.

2) Montrer que, pour tout $t \in [0\,;6]$, $G'(t) = 1{,}2\,(1-t)\,\mathrm{e}^{-t}$. Dresser le tableau de variations de G sur $[0\,;6]$ (valeurs arrondies au centième).

3) Justifier que l'équation $G(t) = 1{,}1$ admet une unique solution α sur $[1\,;6]$.

4) La fonction Python `seuil` ci-contre doit renvoyer, par balayage avec le pas `pas`, la première valeur de $t \geqslant 1$ testée pour laquelle la glycémie est inférieure ou égale à $1{,}1$ g/L. Recopier et compléter les deux lignes incomplètes.

```
from math import exp

def G(t):
    return 1 + 1.2 * t * exp(-t)

def seuil(pas):
    t = 1
    while ... :
        t = ...
    return t
```

5) Quelle valeur renvoie `seuil(1)` ? Justifier par le calcul des valeurs de G testées (arrondies au centième). Que peut-on en déduire pour α ?

6) Quelle valeur renvoie `seuil(0.1)` ? Justifier par deux calculs. Au bout de combien de temps, à dix minutes près, la glycémie repasse-t-elle sous $1{,}1$ g/L ?