Exercice 1 — Conjecturer à la machine, prouver à la main

6 points

1) Pour $k=1$, $x=10$: $f(10)=\dfrac{29}{8}=3{,}625$. Pour $k=2$, $x=100$: $f(100)=\dfrac{299}{98}\approx 3{,}051$.
Le programme affiche donc `10 3.625` puis `100 3.0510204081632653` (soit $3{,}051$ au millième).

2) Les valeurs $3{,}625$; $3{,}051$; $3{,}005$; … se rapprochent de 3 : on conjecture que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3}$.

3) Pour $x\neq 0$ et $x\neq 2$, on factorise le numérateur et le dénominateur par x :

$$f(x)=\frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\frac{3-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{2}{x}$ tendent vers 0, donc le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 1. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3}$: la conjecture est démontrée.
La courbe représentative de f admet $\boxed{\text{une asymptote horizontale d'équation } y=3}$ en $+\infty$.

4) Il faut remplacer la ligne `x = 10**k` par `x = 2 + 10**(-k)` (on peut aussi écrire `x = 2 + 0.1**k`).
Pour $k=1$: $f(2{,}1)=\dfrac{5{,}3}{0{,}1}=53$; pour $k=2$: $f(2{,}01)=\dfrac{5{,}03}{0{,}01}=503$. Le programme affiche `2.1 53.0` puis `2.01 503.0` (aux arrondis machine près), puis $5\,003$, $50\,003$, …

5) Lorsque x tend vers 2 avec $x>2$: le numérateur $3x-1$ tend vers $5>0$; le dénominateur $x-2$ tend vers 0 en restant strictement positif. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=+\infty}$.
La courbe représentative de f admet $\boxed{\text{une asymptote verticale d'équation } x=2}$.

6) Lorsque x tend vers 2 avec $x<2$, le numérateur tend toujours vers $5>0$ mais le dénominateur $x-2$ tend vers 0 en restant strictement négatif. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=-\infty}$.

Exercice 2 — Quatre limites

4 points

1) Pour $x\neq 0$, $2x^3-5x^2+1=x^3\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$. Lorsque x tend vers $+\infty$, x^3 tend vers $+\infty$ et la parenthèse tend vers $2-0+0=2>0$. Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^3-5x^2+1\right)=+\infty}$. Pas d'asymptote.

2) Lorsque x tend vers 0 avec $x>0$, $\sqrt{x}$ tend vers 0 en restant strictement positif, donc $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ et $4-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $-\infty$: $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(4-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=-\infty}$.
La courbe admet $\boxed{\text{une asymptote verticale d'équation } x=0}$ (l'axe des ordonnées).

3) Lorsque x tend vers $-\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ et e^x tend vers 0 (limite de référence), donc $3\,\mathrm{e}^x$ tend

vers 0. Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+3\,\mathrm{e}^x\right)=+\infty}$. Pas d'asymptote.

4) Pour $x\neq 0$, $\dfrac{5x+2}{x^2+1}=\dfrac{x^2\left(\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1 : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x+2}{x^2+1}=0}$.
La courbe admet $\boxed{\text{une asymptote horizontale d'équation } y=0}$ (l'axe des abscisses) en $+\infty$.

Exercice 3 — La jardinière

5,5 points

1) Le volume d'un pavé droit à base carrée de côté x et de hauteur h est x^2h. Donc $x^2h=13\,500$, soit $\boxed{h=\dfrac{13\,500}{x^2}}$.
L'aire de bois est celle du fond (un carré de côté x) et des quatre faces latérales (des rectangles de côtés x et h) :

$$S(x)=x^2+4xh=x^2+4x\times\frac{13\,500}{x^2}=\boxed{x^2+\frac{54\,000}{x}}.$$

2) *En* 0 *:* lorsque x tend vers 0 avec $x>0$, x^2 tend vers 0 et $\dfrac{54\,000}{x}$ tend vers $+\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}S(x)=+\infty}$. Une jardinière très étroite doit être très haute pour contenir $13{,}5$ L : ses faces latérales demandent énormément de bois.
En $+\infty$ *:* x^2 tend vers $+\infty$ et $\dfrac{54\,000}{x}$ tend vers 0, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}S(x)=+\infty}$. Une jardinière très large a un fond immense, même si elle est très basse.

3) Pour $x>0$, $x^2>0$ et $2>0$: $S'(x)$ a le signe de $x^3-27\,000$. Or

$$x^3-27\,000\geqslant 0\iff x^3\geqslant 27\,000\iff x\geqslant 30$$

car la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $30^3=27\,000$. Donc $S'(x)<0$ sur $]0\,;30[$, $S'(30)=0$ et $S'(x)>0$ sur $]30\,;+\infty[$.
$S(30)=900+\dfrac{54\,000}{30}=900+1\,800=2\,700$.

x	0		30		$+\infty$
$S'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
S	‖ $+\infty$	↘	$2\,700$	↗	$+\infty$

Le minimum de S est atteint pour $x=30$; alors $h=\dfrac{13\,500}{900}=15$. La jardinière la plus économe mesure $\boxed{30\text{ cm}\times30\text{ cm}\times15\text{ cm}}$ et utilise $\boxed{2\,700\text{ cm}^2}$ de bois.

4) D'après le tableau de variations, $2\,920>2\,700$:

- sur $]0\,;30]$, S est continue, strictement décroissante, et prend toutes les valeurs de $[2\,700\,;+\infty[$: l'équation $S(x) = 2\,920$ y admet une unique solution α ;

- sur $[30\,;+\infty[$, S est continue, strictement croissante, et prend toutes les valeurs de $[2\,700\,;+\infty[$: l'équation y admet une unique solution β.

L'équation $S(x) = 2\,920$ admet donc exactement deux solutions sur $]0\,;+\infty[$.

5) À la calculatrice (tableau de valeurs au pas de $0{,}1$) :

$$S(22{,}2) \approx 2\,925{,}3 > 2\,920 \quad \text{et} \quad S(22{,}3) \approx 2\,918{,}8 < 2\,920 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{22{,}2 < \alpha < 22{,}3}$$

$$S(39{,}3) \approx 2\,918{,}5 < 2\,920 \quad \text{et} \quad S(39{,}4) \approx 2\,922{,}9 > 2\,920 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{39{,}3 < \beta < 39{,}4}$$

La plaque suffit lorsque $S(x) \leqslant 2\,920$, c'est-à-dire, d'après le tableau de variations, lorsque $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$. Au millimètre près, le côté doit être compris entre $22{,}3$ cm et $39{,}3$ cm.

Exercice 4 — Lire un tableau de variations

3 points

1) $f(x)$ tend vers 2 lorsque x tend vers $-\infty$: la courbe admet, en $-\infty$, une asymptote horizontale d'équation $y = 2$. En $+\infty$, $f(x)$ tend vers $+\infty$: pas d'asymptote.

2) On utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle où f est strictement monotone.

- $f(x) = 0$: sur $]-\infty\,;1]$, f est strictement croissante et tend vers 2 en $-\infty$, donc $f(x) > 2 > 0$: aucune solution. Sur $[1\,;4]$, f est continue, strictement décroissante de 5 à -1 et $0 \in [-1\,;5]$: une solution. Sur $[4\,;+\infty[$, f est continue, strictement croissante de -1 vers $+\infty$: une solution. Au total, deux solutions.

- $f(x) = 2$: aucune solution sur $]-\infty\,;1]$ (on vient de voir que $f(x) > 2$) ; une solution sur $[1\,;4]$, c'est $x = 2$ puisque $f(2) = 2$; une solution sur $[4\,;+\infty[$, c'est $x = 5$ puisque $f(5) = 2$. Au total, deux solutions : 2 et 5.

- $f(x) = 6$: sur $]-\infty\,;4]$, $f(x) \leqslant 5 < 6$: aucune solution. Sur $[4\,;+\infty[$, f est continue, strictement croissante de -1 vers $+\infty$ et $6 > -1$: une solution. Au total, une solution.

3) D'après le tableau, $f(x) > 2$ sur $]-\infty\,;1]$. Sur $[1\,;4]$, f est décroissante et $f(2) = 2$, donc $f(x) \leqslant 2 \iff x \geqslant 2$. Sur $[4\,;+\infty[$, f est croissante et $f(5) = 2$, donc $f(x) \leqslant 2 \iff x \leqslant 5$. Finalement, $\boxed{f(x) \leqslant 2 \iff x \in [2\,;5]}$.

Exercice 5 — Une affirmation à examiner

1,5 point

Léa a tort. Une asymptote horizontale décrit le comportement de la courbe *à l'infini* : rien n'empêche la courbe de la traverser ailleurs. Un contre-exemple suffit.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ tendent vers 0, donc $f(x)$ tend vers 0 : la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe de f. Pourtant $f(1) = 0$: la courbe **coupe** son asymptote au point d'abscisse 1 (elle est en dessous

pour $x < 1$, où $x - 1 < 0$, et au-dessus pour $x > 1$).
Barème indicatif : $0{,}5$ pour la réponse « faux » avec une idée de contre-exemple, $1{,}5$ pour un contre-exemple complet (limite justifiée et point d'intersection).

Bonus — Le moine et la montagne

hors barème

On repère l'heure t en heures, $t \in [6\,;18]$. On note $m(t)$ l'altitude du moine à l'heure t le jour de la montée et $d(t)$ son altitude à la même heure le jour de la descente, et H l'altitude du sommet (celle du pied vaut 0).
Le moine se déplace sans « sauter » : les fonctions m et d sont continues sur $[6\,;18]$, donc la fonction $\varphi = m - d$ l'est aussi. Or

$$\varphi(6) = m(6) - d(6) = 0 - H = -H < 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(18) = m(18) - d(18) = H - 0 = H > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t_0 \in]6\,;18[$ tel que $\varphi(t_0) = 0$, c'est-à-dire $m(t_0) = d(t_0)$: à l'heure t_0, le moine est à la même altitude les deux jours. Comme il suit le même sentier, cette altitude correspond au même endroit du chemin :
le moine est passé au même endroit à la même heure les deux jours.
Remarque : on peut aussi imaginer deux moines partant le même jour, l'un du pied et l'autre du sommet : ils se croisent forcément.