Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1 — Conjecturer à la machine, prouver à la main

6 points

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 2$ par $f(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$.

```
def f(x):
    return (3*x - 1)/(x - 2)

for k in range(1, 6):
    x = 10**k
    print(x, f(x))
```

1) On exécute le programme ci-contre. Donner les deux premières lignes affichées (on donnera la valeur exacte de $f(x)$ sous forme de fraction, puis une valeur approchée au millième).

2) Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

3) Démontrer cette conjecture. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

4) On veut maintenant observer les valeurs de $f(x)$ lorsque x prend les valeurs $2{,}1$; $2{,}01$; $2{,}001$; … Quelle ligne du programme faut-il modifier, et par quoi ? Donner les deux premières lignes alors affichées.

5) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2 avec $x > 2$. Justifier. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

6) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 2 avec $x < 2$.

Exercice 2 — Quatre limites

4 points

Déterminer chacune des limites suivantes en justifiant. Lorsque c'est le cas, préciser l'asymptote que l'on peut en déduire pour la courbe représentative de la fonction.

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x^3 - 5x^2 + 1\right)$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \left(4 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^2 + 3\,\mathrm{e}^{x}\right)$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+2}{x^2+1}$

Exercice 3 — La jardinière

5,5 points

Un artisan fabrique une jardinière en bois, sans couvercle, en forme de pavé droit à base carrée. Le côté de la base mesure x centimètres ($x > 0$), la hauteur mesure h centimètres, et le volume intérieur doit être de $13{,}5$ litres, soit $13\,500$ cm^3. On note $S(x)$ l'aire totale de bois utilisée (le fond et les quatre faces latérales), en cm^2.

1) Exprimer h en fonction de x, puis montrer que, pour tout $x > 0$, $S(x) = x^2 + \dfrac{54\,000}{x}$.

2) Déterminer les limites de $S(x)$ lorsque x tend vers 0 (avec $x > 0$) et lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter ces deux résultats dans le contexte.

3) On admet que, pour tout $x > 0$, $S'(x) = \dfrac{2\left(x^3 - 27\,000\right)}{x^2}$. Étudier le signe de $S'(x)$, dresser le tableau de variations de S sur $]0\,;+\infty[$ et donner les dimensions de la jardinière qui utilise le moins de bois.

4) L'artisan dispose d'une plaque de contreplaqué de $2\,920$ cm^2 (environ $0{,}29$ m^2). À l'aide du tableau de variations, déterminer le nombre de solutions de l'équation $S(x) = 2\,920$ sur $]0\,;+\infty[$.

5) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude $0{,}1$ de chacune de ces solutions. En déduire les valeurs du côté x, au millimètre près, pour lesquelles la plaque suffit.

Exercice 4 — Lire un tableau de variations

3 points

Une fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$; son tableau de variations est donné ci-contre. On sait de plus que $f(2) = 2$ et $f(5) = 2$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
f		$\nearrow$	5	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	2				-1		

1) La courbe représentative de f admet-elle une asymptote ? Si oui, préciser son équation.

2) Déterminer, en justifiant, le nombre de solutions de chacune des équations $f(x) = 0$, $f(x) = 2$ et $f(x) = 6$.

3) Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant 2$.

Exercice 5 — Une affirmation à examiner

1,5 point

Léa affirme : « La courbe représentative d'une fonction ne peut jamais couper son asymptote horizontale. »
A-t-elle raison ? Argumenter. *Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte.*

Bonus — Le moine et la montagne

hors barème

Un moine quitte le pied d'une montagne à 6 h et suit un sentier jusqu'au sommet, qu'il atteint à 18 h. Le lendemain, il repart du sommet à 6 h, redescend par le même sentier et arrive au pied à 18 h. Ses vitesses varient librement ; il peut même s'arrêter.
Montrer qu'il existe un endroit du sentier où le moine est passé **exactement à la même heure** les deux jours.
Indication : on pourra noter $m(t)$ et $d(t)$ les altitudes du moine à l'heure t le premier et le second jour, et étudier la fonction $m - d$.