## Exercice 1 — Apprendre une liste de mots

**8,5 points**

**1)** $M(0) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{0}\right) = 50 \times (1-1) = \boxed{0}$ : avant la première révision, l'étudiante ne connaît aucun mot de la liste.

**2)** **a.** Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, $-0{,}2t$ tend vers $-\infty$. Or $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^{X} = 0$ (limite de référence de la fonction exponentielle). Donc $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0{,}2t} = 0}$.

**b.** Par opérations : $1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ tend vers $1 - 0 = 1$, donc $M(t)$ tend vers $50 \times 1$ : $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} M(t) = 50}$.

La courbe représentative de $M$ admet donc $\boxed{\text{une asymptote horizontale d'équation } y = 50}$ en $+\infty$.
*Interprétation :* au fil des jours, le nombre de mots sûrs se rapproche de $50$, c'est-à-dire de la liste entière : à long terme, presque tous les mots sont mémorisés.

**3)** **a.** $M(t) = 50 - 50\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$. La dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{-0{,}2t}$ est $t \mapsto -0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, donc

$$M'(t) = 0 - 50 \times \left(-0{,}2\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right) = \boxed{10\,\mathrm{e}^{-0{,}2t}}.$$

**b.** Une exponentielle est toujours strictement positive, donc $M'(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ : $\boxed{M \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$. (Le rythme d'apprentissage $M'(t)$, lui, diminue : on gagne de moins en moins de mots par jour.)

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $M'(t)$ | $+$ | |
| $M$ | $0$ ↗ | $50$ |

**4)** Pour tout $t \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-0{,}2t} > 0$, donc $1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t} < 1$ et, en multipliant par $50 > 0$ : $\boxed{M(t) < 50}$. Selon ce modèle, la liste n'est jamais entièrement sûre : il reste toujours quelques mots fragiles.

**5)** **a.** La fonction $M$ est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ ; $M(0) = 0$ et $M(t)$ tend vers $50$ en $+\infty$. Comme $0 \leqslant 25 < 50$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), l'équation $M(t) = 25$ admet $\boxed{\text{une unique solution } t_0 \text{ dans } [0\,;+\infty[}$.

**b.** Avec les données utiles :

$$M(3) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}6}\right) \approx 50 \times 0{,}45 = 22{,}5 < 25$$

$$M(4) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-0{,}8}\right) \approx 50 \times 0{,}55 = 27{,}5 > 25.$$

Comme $M$ est strictement croissante, $\boxed{3 < t_0 < 4}$ : la moitié de la liste est sûre entre le troisième et le quatrième jour de révision.

**6)** $M(10) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) \approx 50 \times (1 - 0{,}14) = 50 \times 0{,}86 = 43$. Or $\dfrac{43}{50} = \dfrac{86}{100}$.
Au bout de $10$ jours, l'étudiante restitue sans erreur environ $\boxed{43 \text{ mots, soit } 86\,\% \text{ de la liste}}$.

## Exercice 2 — L'inventaire des oiseaux

**11,5 points**

### Partie A — Le nombre d'espèces recensées

**1)** $N(3) = \dfrac{60 \times 3}{3+3} = \dfrac{180}{6} = \boxed{30}$ et $N(9) = \dfrac{60 \times 9}{9+3} = \dfrac{540}{12} = \boxed{45}$.
Après $3$ heures, $30$ espèces ont été observées ; après $9$ heures, $45$.

**2)** **a.** Pour $t > 0$, on factorise le dénominateur par $t$ : $t + 3 = t\left(1 + \dfrac{3}{t}\right)$, donc

$$N(t) = \frac{60\,t}{t\left(1+\frac{3}{t}\right)} = \boxed{\frac{60}{1+\frac{3}{t}}}.$$

**b.** Lorsque $t$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{3}{t}$ tend vers $0$, donc $1 + \dfrac{3}{t}$ tend vers $1$ et, par quotient, $\boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 60}$.
La courbe représentative de $N$ admet $\boxed{\text{une asymptote horizontale d'équation } y = 60}$ en $+\infty$.
*Interprétation :* même en observant très longtemps, le nombre d'espèces recensées ne dépasse pas $60$ : le modèle estime à $60$ la richesse en oiseaux de la forêt.

**3)** $N$ est un quotient $\dfrac{u}{w}$ avec $u(t) = 60t$, $u'(t) = 60$, $w(t) = t + 3$, $w'(t) = 1$ :

$$N'(t) = \frac{u'w - uw'}{w^2} = \frac{60(t+3) - 60t \times 1}{(t+3)^2} = \frac{60t + 180 - 60t}{(t+3)^2} = \boxed{\frac{180}{(t+3)^2}}.$$

Pour tout $t \geqslant 0$, $(t+3)^2 > 0$ donc $N'(t) > 0$ : $\boxed{N \text{ est strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

| $t$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $N'(t)$ | | $+$ | |
| $N$ | $0$ | ↗ | $60$ |

**4)** **a.** $N$ est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, avec $N(0) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t) = 60$.
Pour tout réel $k$ tel que $0 \leqslant k < 60$, le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone) assure que $\boxed{\text{l'équation } N(t) = k \text{ admet une unique solution}}$ dans $[0\,;+\infty[$.

**b.** Pour $t \geqslant 0$ :

$$N(t) = 50 \iff \frac{60t}{t+3} = 50 \iff 60t = 50(t+3) \iff 60t = 50t + 150$$
$$\iff 10t = 150 \iff t = 15.$$

$\boxed{t = 15}$ : il faut $15$ heures d'observation pour recenser $50$ espèces.

### Partie B — Lire le temps à partir du nombre d'espèces

**5)** Soit $y \in [0\,;60[$. Pour $t \geqslant 0$ :

$$N(t) = y \iff \frac{60t}{t+3} = y \iff 60t = y(t+3) \iff 60t - yt = 3y$$

$$\iff t\,(60-y) = 3y \iff t = \frac{3y}{60-y}$$

(on peut diviser car $60 - y > 0$). L'unique solution de $N(t) = y$ est donc $g(y)$ : $\boxed{g(y) = \dfrac{3y}{60-y}}$.

**6)** $g(30) = \dfrac{90}{30} = \boxed{3}$ (cohérent avec $N(3) = 30$) et $g(54) = \dfrac{162}{6} = \boxed{27}$.
Il faut $27$ heures d'observation pour recenser $54$ espèces, soit $90\,\%$ de la richesse estimée.

**7)** Lorsque $y$ tend vers $60$ avec $y < 60$ : le numérateur $3y$ tend vers $180 > 0$ et le dénominateur $60 - y$ tend vers $0$ en restant strictement positif. Par quotient, $\boxed{\lim\limits_{\substack{y \to 60 \\ y<60}} g(y) = +\infty}$.

La courbe représentative de $g$ admet $\boxed{\text{une asymptote verticale d'équation } x = 60}$.
*Lien avec 2.b :* l'asymptote horizontale $y = 60$ de $\mathcal{C}_N$ devient l'asymptote verticale $x = 60$ de la courbe de $g$ : plus on veut approcher les $60$ espèces, plus le temps d'observation nécessaire devient grand.

**8)** La courbe représentative de $g$ est $\boxed{\text{la symétrique de } \mathcal{C}_N \text{ par rapport à la droite } \Delta : y = x}$ (on échange le rôle des deux axes : le temps se lit en ordonnée, le nombre d'espèces en abscisse).

