Calculatrice interdite

Données utiles (valeurs approchées) : $\mathrm{e}^{-0,6} \approx 0,55$; $\mathrm{e}^{-0,8} \approx 0,45$; $\mathrm{e}^{-1} \approx 0,37$; $\mathrm{e}^{-2} \approx 0,14$.

Exercice 1 — Apprendre une liste de mots

8,5 points

Une étudiante en orthophonie doit mémoriser une liste de 50 mots d'une langue étrangère. Elle les révise chaque jour et, chaque soir, compte les mots qu'elle restitue sans erreur. Le nombre de mots « sûrs » au bout de t jours de révision est modélisé par

$$M(t) = 50\left(1 - \mathrm{e}^{-0,2t}\right), \qquad t \in [0\,;+\infty[.$$

1) Calculer $M(0)$ et interpréter ce résultat.

2) **a.** Déterminer la limite de $\mathrm{e}^{-0,2t}$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier.

b. En déduire la limite de $M(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de M ? Interpréter ce résultat dans le contexte.

3) **a.** Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $M'(t) = 10\,\mathrm{e}^{-0,2t}$.

b. En déduire le sens de variation de M sur $[0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

4) Justifier que, pour tout $t \geqslant 0$, $M(t) < 50$. Interpréter.

5) **a.** Montrer que l'équation $M(t) = 25$ admet une unique solution t_0 sur $[0\,;+\infty[$.

b. À l'aide des données utiles, déterminer deux entiers consécutifs qui encadrent t_0. Interpréter.

6) Estimer le nombre de mots sûrs au bout de 10 jours, puis la proportion de la liste que cela représente.

Exercice 2 — L'inventaire des oiseaux

11,5 points

Pour estimer la richesse en oiseaux d'une forêt, une ornithologue note le nombre d'espèces différentes observées depuis le début de son inventaire. Au bout de t heures d'observation ($t \geqslant 0$), ce nombre est modélisé par

$$N(t) = \frac{60\,t}{t+3}.$$

Partie A — Le nombre d'espèces recensées

1) Calculer $N(3)$ et $N(9)$.

2) **a.** Montrer que, pour tout $t > 0$, $N(t) = \dfrac{60}{1+\frac{3}{t}}$.

b. En déduire la limite de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de N ? Interpréter dans le contexte.

3) Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $N'(t) = \dfrac{180}{(t+3)^2}$. En déduire le sens de variation de N sur $[0\,;+\infty[$ et dresser son tableau de variations.

4) **a.** Justifier que, pour tout réel k de l'intervalle $[0\,;60[$, l'équation $N(t) = k$ admet une unique solution dans $[0\,;+\infty[$.

b. Résoudre l'équation $N(t) = 50$ et interpréter la solution.

Partie B — Lire le temps à partir du nombre d'espèces

La fonction N est continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, et ses valeurs décrivent l'intervalle $[0\,;60[$. Elle admet donc une *fonction réciproque* g, définie sur $[0\,;60[$: pour tout y de $[0\,;60[$, $g(y)$ est le temps d'observation nécessaire pour recenser y espèces.

5) En résolvant l'équation $N(t) = y$ d'inconnue t, montrer que, pour tout $y \in [0\,;60[$,

$$g(y) = \frac{3y}{60 - y}.$$

6) Calculer $g(30)$ et $g(54)$. Interpréter $g(54)$.

7) Déterminer la limite de $g(y)$ lorsque y tend vers 60 (avec $y < 60$). Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de g ? Faire le lien avec la question **2.b**.

8) La figure ci-dessous représente la courbe $\mathcal{C}_N$ de la fonction N et la droite Δ d'équation $y = x$. Par quelle transformation la courbe représentative de g se déduit-elle de $\mathcal{C}_N$? Tracer cette courbe sur la figure, **à rendre avec la copie**.

