Exercice 1

6 points

Aucune justification n'était demandée; les explications ci-dessous sont données pour comprendre.

1) Réponse a : 3. Lorsque x tend vers $+\infty$, x^2 tend vers $+\infty$, donc $\dfrac{5}{x^2}$ tend vers 0 et $f(x)$ tend vers $3-0=3$.

2) Réponse c : $+\infty$. Lorsque x tend vers 2 avec $x>2$, $x-2$ tend vers 0 en restant strictement positif, donc son inverse tend vers $+\infty$.

3) Réponse a : -4. Limite de référence : e^x tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$, donc e^x-4 tend vers -4.

4) Réponse a : $y=2$. Pour $x>3$, $h(x)=\dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}$, qui tend vers $\dfrac{2}{1}=2$ lorsque x tend vers $+\infty$. (La droite $x=3$ est une asymptote *verticale*.)

5) Réponse b : exactement une solution. f est continue et strictement croissante sur $[0\,;5]$, et 0 est compris entre $f(0)=-3$ et $f(5)=4$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

6) Réponse b : $1{,}4<\alpha<1{,}5$. f est strictement décroissante et change de signe entre $1{,}4$ (où $f(1{,}4)=0{,}2>0$) et $1{,}5$ (où $f(1{,}5)=-0{,}1<0$) : la solution est entre les deux. Rien ne permet d'affirmer que $\alpha=1{,}45$.

Exercice 2

6,5 points

1) g est dérivable sur $[0\,;1]$ et $g'(x)=\mathrm{e}^x+1$. Comme $\mathrm{e}^x>0$ pour tout réel x, on a $g'(x)>0$: g est strictement croissante sur $[0\,;1]$.
De plus g est continue sur $[0\,;1]$ (elle est dérivable), $g(0)=\mathrm{e}^0+0-3=-2<0$ et $g(1)=\mathrm{e}+1-3=\mathrm{e}-2\approx 0{,}72>0$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g étant continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$ et 0 étant compris entre $g(0)$ et $g(1)$, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in[0\,;1]$.

2) Le programme 1 est un *balayage* au pas de $0{,}1$: il teste $g(0)$, $g(0{,}1)$, $g(0{,}2)$, … tant que la valeur est négative, et s'arrête à la première valeur positive ou nulle. À la calculatrice :

$$g(0{,}7)=\mathrm{e}^{0{,}7}-2{,}3\approx -0{,}286<0 \qquad \text{et} \qquad g(0{,}8)=\mathrm{e}^{0{,}8}-2{,}2\approx 0{,}026>0.$$

La boucle s'arrête donc pour $k=8$ et le programme affiche `0.7 0.8`.
Comme g est strictement croissante et change de signe entre $0{,}7$ et $0{,}8$: $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

3) À chaque tour, on coupe l'intervalle $[a\,;b]$ en son milieu m ; comme g est croissante, si $g(m)>0$ la solution est à gauche de m (on remplace b), sinon elle est à droite (on remplace a).

```
def dicho(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = (a + b)/2
        if g(m) > 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return a, b
```

4) Au départ, $b - a = 0{,}1$. À chaque passage dans la boucle, la longueur de l'intervalle est divisée par 2 : après n passages elle vaut $\dfrac{0{,}1}{2^n}$. La boucle s'arrête dès que cette longueur est inférieure ou égale à $0{,}001$, c'est-à-dire dès que $2^n \geqslant 100$.
Or $2^6 = 64 < 100$ et $2^7 = 128 \geqslant 100$: la boucle effectue $\boxed{\text{7 passages}}$ (longueur finale $\dfrac{0{,}1}{128} \approx 0{,}000\,78$).

5) On a $0{,}7914 < \alpha < 0{,}7922$; ces deux bornes s'arrondissent au centième à la même valeur, donc $\boxed{\alpha \approx 0{,}79}$.

Exercice 3

7,5 points

1) Pour $x \in]0\,;100]$, on divise chaque terme de $C(x)$ par x :

$$M(x) = \frac{0{,}001\,x^3}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{128}{x} = \boxed{0{,}001\,x^2 + 3 + \frac{128}{x}}.$$

$M(40) = 0{,}001 \times 1600 + 3 + \dfrac{128}{40} = 1{,}6 + 3 + 3{,}2 = \boxed{7{,}80\ €}$.

2) Lorsque x tend vers 0 avec $x > 0$: $0{,}001\,x^2 + 3$ tend vers 3, et $\dfrac{128}{x}$ tend vers $+\infty$ (inverse d'un nombre positif qui tend vers 0). Par somme, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} M(x) = +\infty}$.
La courbe représentative de M admet donc $\boxed{\text{une asymptote verticale d'équation } x = 0}$ (l'axe des ordonnées).
Interprétation : quand très peu de paniers sont préparés, la location du local (128 €) se répartit sur un tout petit nombre de paniers : le coût moyen d'un panier devient énorme.

3) **a.** M est dérivable sur $]0\,;100]$ comme somme de fonctions dérivables, avec $\left(x^2\right)' = 2x$ et $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$:

$$M'(x) = 0{,}002\,x - \frac{128}{x^2} = \frac{0{,}002\,x \times x^2}{x^2} - \frac{128}{x^2} = \boxed{\frac{0{,}002\,x^3 - 128}{x^2}}.$$

b. Sur $]0\,;100]$, $x^2 > 0$: $M'(x)$ a le signe de $0{,}002\,x^3 - 128$. Or

$$0{,}002\,x^3 - 128 \geqslant 0 \iff x^3 \geqslant \frac{128}{0{,}002} = 64\,000 \iff x \geqslant 40$$

(la fonction cube est strictement croissante et $40^3 = 64\,000$). Donc $M'(x) < 0$ sur $]0\,;40[$,

$M'(40) = 0$ et $M'(x) > 0$ sur $]40\,;100]$.
$M(100) = 0{,}001 \times 10\,000 + 3 + 1{,}28 =$ $\boxed{14{,}28}$.

x	0		40		100
$M'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
M	‖ $+\infty$	↘	$7{,}8$	↗	$14{,}28$

4) **a.** Sur $[40\,;100]$, la fonction M est continue (elle est dérivable) et strictement croissante. De plus $M(40) = 7{,}8 < 10$ et $M(100) = 14{,}28 > 10$: 10 est compris entre $M(40)$ et $M(100)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone), l'équation $M(x) = 10$ admet $\boxed{\text{une unique solution } \beta \in [40\,;100]}$.

b. À la calculatrice (tableau de valeurs au pas de $0{,}1$) :

$$M(72{,}3) \approx 9{,}998 < 10 \qquad \text{et} \qquad M(72{,}4) \approx 10{,}010 > 10,$$

et M est croissante sur $[40\,;100]$, donc $\boxed{72{,}3 < \beta < 72{,}4}$.

5) D'après le tableau de variations :

- sur $]0\,;40]$, M est strictement décroissante et $M(\alpha) = 10$, donc $M(x) < 10 \iff x > \alpha$;
- sur $[40\,;100]$, M est strictement croissante et $M(\beta) = 10$, donc $M(x) < 10 \iff x < \beta$.

L'activité est rentable exactement pour $\alpha < x < \beta$, avec $19{,}3 < \alpha < 19{,}4$ et $72{,}3 < \beta < 72{,}4$.
Pour un nombre entier de paniers : $\boxed{\text{de } 20 \text{ à } 72 \text{ paniers par semaine}}$.
Vérification : $M(19) \approx 10{,}10 > 10$, $M(20) = 9{,}80 < 10$, $M(72) \approx 9{,}96 < 10$ et $M(73) \approx 10{,}08 > 10$.
Interprétation : en dessous de 20 paniers, la location pèse trop sur chaque panier ; au-delà de 72, les heures supplémentaires rendent le panier trop coûteux.