Calculatrice autorisée (mode examen)

Exercice 1

6 points

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. **Aucune justification n'est demandée** ; une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3 - \frac{5}{x^2}$. La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est :

a) 3 b) -2 c) $+\infty$ d) 0

2) Soit g la fonction définie sur $]2\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x-2}$. La limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 2 (avec $x > 2$) est :

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $+\infty$ d) $-\infty$

3) La limite de $\mathrm{e}^x - 4$ lorsque x tend vers $-\infty$ est :

a) -4 b) 0 c) $-\infty$ d) $+\infty$

4) Soit h la fonction définie sur $]3\,;+\infty[$ par $h(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. La courbe représentative de h admet pour asymptote horizontale la droite d'équation :

a) $y = 2$ b) $y = 3$ c) $y = -\frac{1}{3}$ d) $x = 3$

5) Une fonction f est continue et strictement croissante sur $[0\,;5]$, avec $f(0) = -3$ et $f(5) = 4$. Sur $[0\,;5]$, l'équation $f(x) = 0$:

a) n'a aucune solution b) a exactement une solution
c) a au moins deux solutions d) a un nombre de solutions inconnu

6) Une fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1\,;2]$. On dispose des valeurs approchées suivantes :

x	1,3	1,4	1,5	1,6
$f(x)$	0,6	0,2	$-0{,}1$	$-0{,}3$

L'équation $f(x) = 0$ admet sur $[1\,;2]$ une unique solution α, et :

a) $1{,}3 < \alpha < 1{,}4$ b) $1{,}4 < \alpha < 1{,}5$ c) $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$ d) $\alpha = 1{,}45$

Exercice 2

6,5 points

On considère la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 3$. On cherche à résoudre l'équation $g(x) = 0$.

1) Justifier que la fonction g est strictement croissante sur $[0\,;1]$, puis montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;1]$.

2) On exécute le **programme 1** ci-dessous. Qu'affiche-t-il ? Que peut-on en déduire pour α ?

Programme 1

```
from math import exp
def g(x):
    return exp(x) + x - 3
k = 0
while g(k/10) < 0:
    k = k + 1
print((k-1)/10, k/10)
```

Programme 2

```
def dicho(a, b, e):
    while b - a > e:
        m = ...
        if g(m) > 0:
            ... = m
        else:
            ... = m
    return a, b
```

3) Recopier et compléter la fonction `dicho` du **programme 2** pour qu'elle renvoie, par dichotomie, un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à `e`.

4) Combien de passages dans la boucle `while` l'appel `dicho(0.7, 0.8, 0.001)` effectue-t-il ? Justifier.

5) Cet appel renvoie le couple `(0.7914..., 0.7921...)`. En déduire une valeur approchée de α au centième.

Exercice 3

7,5 points

Une association distribue chaque semaine des paniers de légumes à ses adhérents. Pour x paniers préparés dans la semaine, avec $0 < x \leqslant 100$, le coût total hebdomadaire, en euros, est modélisé par $C(x) = 0{,}001\,x^3 + 3x + 128$ (128 € de location du local, 3 € de légumes par panier et un terme $0{,}001\,x^3$ qui traduit les heures de travail supplémentaires lorsque le nombre de paniers augmente).

On appelle *coût moyen* d'un panier le nombre $M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$, pour $x \in]0\,;100]$.

1) Montrer que, pour tout $x \in]0\,;100]$, $M(x) = 0{,}001\,x^2 + 3 + \dfrac{128}{x}$, puis calculer $M(40)$.

2) Déterminer la limite de $M(x)$ lorsque x tend vers 0 (avec $x > 0$). Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de M ? Interpréter ce résultat dans le contexte.

3) **a.** Montrer que, pour tout $x \in]0\,;100]$, $M'(x) = \dfrac{0{,}002\,x^3 - 128}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $M'(x)$ et dresser le tableau de variations de M sur $]0\,;100]$ (on donnera la valeur exacte de $M(100)$).

4) Chaque panier est vendu 10 €. L'activité est *rentable* lorsque le coût moyen d'un panier est inférieur à 10 €.

a. Montrer que l'équation $M(x) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[40\,;100]$.

b. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de β d'amplitude $0{,}1$.

5) On admet que l'équation $M(x) = 10$ admet aussi une unique solution α sur $]0\,;40]$ et que $19{,}3 < \alpha < 19{,}4$. Pour quels nombres entiers de paniers l'activité est-elle rentable ? Justifier à l'aide du tableau de variations.