Exercice 1

1 point

L'ordonnée du point de la droite d'abscisse $\bar{x}$ est $a\bar{x}+b$. Or $b=\bar{y}-a\bar{x}$, donc

$$a\bar{x}+b=a\bar{x}+\bar{y}-a\bar{x}=\bar{y}.$$

Le point de la droite d'abscisse $\bar{x}$ a donc pour ordonnée $\bar{y}$: c'est exactement $G(\bar{x}\,;\bar{y})$.
Le point moyen G appartient à la droite de régression.

Exercice 2

6 points

1) **Faux.** $\bar{x}=\dfrac{1+2+4+5}{4}=\dfrac{12}{4}=3$, mais $\bar{y}=\dfrac{3+5+6+10}{4}=\dfrac{24}{4}=6\neq 5$. Le point moyen est $G(3\,;6)$. Faux

2) **Vrai.** $z=\ln y=0{,}2x+1$ donne $y=\mathrm{e}^{0{,}2x+1}=\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{0{,}2x}$. Alors, pour tout x,

$$\frac{y(x+1)}{y(x)}=\frac{\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{0{,}2(x+1)}}{\mathrm{e}\times\mathrm{e}^{0{,}2x}}=\mathrm{e}^{0{,}2(x+1)-0{,}2x}=\mathrm{e}^{0{,}2}.$$

Quand x augmente de 1, y est bien multiplié par $\mathrm{e}^{0{,}2}$ ($\approx 1{,}22$, soit une hausse d'environ $22\,\%$). Vrai

3) **Faux.** $x=50$ est en dehors de l'intervalle $[1\,;10]$ des valeurs observées : utiliser la droite pour $x=50$ est une **extrapolation**, non une interpolation (qui concerne une valeur de x comprise entre les valeurs observées). Faux

4) **Vrai.** Les points $(x_i\,;\ln y_i)$ étant alignés, $\ln y=ax+b$ avec $a<0$, donc $y=\mathrm{e}^{ax+b}$. La fonction $x\mapsto ax+b$ est strictement décroissante (car $a<0$) et la fonction exponentielle est strictement croissante : par composition, $x\mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ est strictement décroissante. Vrai

Exercice 3

8 points

Partie A — Deux ajustements

1) **a.** $\bar{t}=\dfrac{0+2+4+6+8+10+12}{7}=\dfrac{42}{7}=6$

et $\bar{A}=\dfrac{400+338+281+240+199+170+140}{7}=\dfrac{1\,768}{7}\approx 252{,}6.$

Le point moyen est $G_1(6\,;252{,}6)$.

b. On résout $-21{,}4\,t+380{,}9=0$: $t=\dfrac{380{,}9}{21{,}4}\approx 17{,}8.$

Selon le modèle affine, l'activité serait nulle au bout d'environ 18 jours, puis *négative*, ce qui n'a aucun sens physique. De plus, les écarts entre mesures successives diminuent (-62, -57, -41, -41, -29, -30) : la décroissance ralentit, elle n'est pas affine (une activité radioactive décroît proportionnellement à sa valeur).

2) **a.** Avec la calculatrice ($z_i=\ln A_i$) :

t_i	0	2	4	6	8	10	12
$z_i = \ln A_i$	5,991	$\boxed{5{,}823}$	$\boxed{5{,}638}$	$\boxed{5{,}481}$	$\boxed{5{,}293}$	$\boxed{5{,}136}$	$\boxed{4{,}942}$

b. $\bar{t} = 6$ et $\bar{z} = \dfrac{5{,}991 + 5{,}823 + 5{,}638 + 5{,}481 + 5{,}293 + 5{,}136 + 4{,}942}{7} = \dfrac{38{,}304}{7} \approx 5{,}472.$

Le point moyen est $\boxed{G_2(6\,;5{,}472)}$.

c. La calculatrice donne $a \approx -0{,}0869$, $b \approx 5{,}993$ et $r' \approx -0{,}9998$:

$$\boxed{z = -0{,}0869\,t + 5{,}993} \qquad \text{et} \qquad \boxed{r' \approx -0{,}9998}$$

$|r'|$ est encore plus proche de 1 que $|r| \approx 0{,}989$: les points $(t\,;z)$ sont presque parfaitement alignés, l'ajustement affine de z en t est meilleur que celui de A en t.

d. Comme $z = \ln A$, on a $A = \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{-0{,}0869\,t+5{,}993} = \mathrm{e}^{5{,}993} \times \mathrm{e}^{-0{,}0869\,t}$. Or $\mathrm{e}^{5{,}993} \approx 400{,}6$, d'où

$$\boxed{A(t) \approx 400\,\mathrm{e}^{-0{,}0869\,t}}$$

(la valeur 400 est d'ailleurs l'activité mesurée à la livraison).

Partie B — Exploitation du modèle exponentiel

3) $A(5) = 400\,\mathrm{e}^{-0{,}0869\times 5} = 400\,\mathrm{e}^{-0{,}4345} \approx 259{,}0$. Cinq jours après la livraison, l'activité est d'environ $\boxed{259 \text{ MBq}}$ (valeur comprise entre les mesures des jours 4 et 6 : 281 et 240 MBq, c'est cohérent).

4) On cherche t tel que $A(t) = \dfrac{A(0)}{2} = 200$:

$$400\,\mathrm{e}^{-0{,}0869\,t} = 200 \iff \mathrm{e}^{-0{,}0869\,t} = \frac{1}{2} \iff -0{,}0869\,t = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$$
$$\iff t = \frac{\ln 2}{0{,}0869} \approx 7{,}98.$$

La demi-vie vaut $\boxed{\text{environ } 8{,}0 \text{ jours}}$. C'est très proche de la valeur des tables ($8{,}02$ jours) : le modèle construit à partir de sept mesures retrouve la constante physique de l'iode 131, ce qui valide l'ajustement exponentiel. (On le lit aussi dans le tableau : 400 à $t = 0$ et 199 à $t = 8$.)

5) On résout $A(t) \leqslant 4$:

$$400\,\mathrm{e}^{-0{,}0869\,t} \leqslant 4 \iff \mathrm{e}^{-0{,}0869\,t} \leqslant 0{,}01 \iff -0{,}0869\,t \leqslant \ln(0{,}01)$$
$$\iff t \geqslant \frac{\ln(0{,}01)}{-0{,}0869} \approx 53{,}0$$

(on divise par $-0{,}0869 < 0$, ce qui change le sens de l'inégalité). La source pourra quitter le local protégé $\boxed{\text{au bout d'environ } 53 \text{ jours}}$.

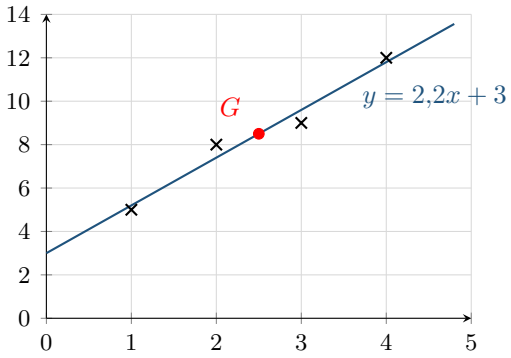
C'est une **extrapolation** : 53 jours est très au-delà des 12 jours de mesures. Elle est pourtant **fiable** ici, car le modèle exponentiel n'est pas qu'un ajustement commode : c'est la loi physique de la décroissance radioactive, dont la demi-vie retrouvée confirme la validité. Seuls les arrondis de a laissent une incertitude : résultat à prendre « à un jour près ».

Exercice 4

5 points

Partie A

1) $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4}{4} = \dfrac{10}{4} = 2{,}5$ et $\bar{y} = \dfrac{5+8+9+12}{4} = \dfrac{34}{4} = 8{,}5$: $\boxed{G(2{,}5\,;8{,}5)}$.



2) La calculatrice donne $a = 2{,}2$, $b = 3$ et $r \approx 0{,}98$:

$$\boxed{y = 2{,}2\,x + 3} \qquad \text{et} \qquad \boxed{r \approx 0{,}98}$$

La droite passe par $(0\,;3)$ et par $G(2{,}5\,;8{,}5)$; elle est tracée ci-dessus.

3) Pour $x = 2{,}5$: $y = 2{,}2 \times 2{,}5 + 3 = 5{,}5 + 3 = 8{,}5$, soit $\boxed{y \approx 8{,}5}$ (c'est l'ordonnée de G, puisque $\bar{x} = 2{,}5$). Comme $1 \leqslant 2{,}5 \leqslant 4$, c'est une **interpolation**.

Partie B

4) $z = \ln y = -0{,}5x + 3$ donne $y = \mathrm{e}^{-0{,}5x+3} = \mathrm{e}^3 \times \mathrm{e}^{-0{,}5x}$. Donc $y = K\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$ avec $\boxed{K = \mathrm{e}^3 \approx 20{,}1}$.

5) $y = 1 \iff \mathrm{e}^{-0{,}5x+3} = 1 \iff -0{,}5x + 3 = \ln 1 = 0 \iff x = 6$. Le modèle donne $y = 1$ pour $\boxed{x = 6}$.

Bonus

hors barème

Notons n le nombre de points du nuage. La somme des résidus s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - a x_i - b\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i - nb.$$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = n\bar{y}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$ (définition des moyennes), et $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = n\bar{y} - a\,n\bar{x} - n\left(\bar{y} - a\bar{x}\right) = n\bar{y} - na\bar{x} - n\bar{y} + na\bar{x} = 0.$$

$\boxed{\text{La somme des résidus est nulle}}$: les points situés au-dessus de la droite « compensent » exactement ceux situés en dessous.