Calculatrice autorisée (mode examen)

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1

1 point

Question de cours. Pour une série statistique à deux variables $(x_i\,;y_i)$, on note $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes des x_i et des y_i. On admet que la droite de régression de y en x a pour équation $y = ax + b$ avec $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Démontrer que le point moyen $G(\bar{x}\,;\bar{y})$ appartient à cette droite.

Exercice 2

6 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Le point moyen du nuage formé des points $(1\,;3)$, $(2\,;5)$, $(4\,;6)$ et $(5\,;10)$ a pour coordonnées $(3\,;5)$.

2) Pour une série $(x\,;y)$ à valeurs strictement positives, on a posé $z = \ln y$ et obtenu la droite de régression $z = 0{,}2x + 1$. Avec ce modèle, lorsque x augmente de 1, la valeur de y est multipliée par $\mathrm{e}^{0{,}2}$.

3) Pour une série statistique dont les valeurs de x sont comprises entre 1 et 10, estimer y pour $x = 50$ à l'aide de la droite de régression est une interpolation.

4) Si les points $(x_i\,;\ln y_i)$ sont alignés sur une droite de coefficient directeur strictement négatif, alors y décroît lorsque x augmente.

Exercice 3

8 points

En médecine nucléaire, l'iode 131 est utilisé pour traiter certaines maladies de la thyroïde. L'activité d'une source d'iode 131, exprimée en mégabecquerels (MBq), diminue au cours du temps. On relève l'activité A d'une source tous les deux jours à partir de sa livraison ($t = 0$).

Temps t_i (jours)	0	2	4	6	8	10	12
Activité A_i (MBq)	400	338	281	240	199	170	140
$z_i = \ln A_i$ (arrondi à 10^{-3})	5,991						

Partie A — Deux ajustements

1) **a.** Calculer les coordonnées du point moyen G_1 du nuage $(t_i\,;A_i)$ (arrondir au dixième).

b. La calculatrice donne, pour ce nuage, la droite de régression $A = -21{,}4\,t + 380{,}9$ et $r \approx -0{,}989$. Selon ce modèle affine, au bout de combien de jours l'activité serait-elle nulle ? Expliquer pourquoi ce modèle ne convient pas pour décrire l'activité sur une longue durée.

2) On pose $z = \ln A$.

a. Recopier et compléter la dernière ligne du tableau.

b. Calculer les coordonnées du point moyen G_2 du nuage $(t_i\,;z_i)$ (arrondir à 10^{-3}).

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de z en t, sous la forme $z = at + b$ (a arrondi à 10^{-4}, b arrondi à 10^{-3}), et le coefficient de corrélation r' (arrondi à 10^{-4}). Comparer r' à r.

d. En déduire que l'activité peut être modélisée par $A(t) = 400\,\mathrm{e}^{-0{,}0869\,t}$.

Partie B — Exploitation du modèle exponentiel

On utilise désormais le modèle $A(t) = 400\,\mathrm{e}^{-0{,}0869\,t}$, où t est en jours et $A(t)$ en MBq.

3) Estimer l'activité de la source 5 jours après la livraison (arrondir à l'unité).

4) La demi-vie d'une source radioactive est la durée au bout de laquelle son activité est divisée par 2. Déterminer la demi-vie de l'iode 131 selon ce modèle (arrondir au dixième de jour). Les tables de physique donnent $8{,}02$ jours : commenter.

5) La réglementation impose de conserver la source dans un local protégé tant que son activité dépasse $1\,\%$ de l'activité initiale, soit 4 MBq. Déterminer au bout de combien de jours la source pourra quitter ce local.
Cette estimation est-elle une interpolation ou une extrapolation ? Est-elle fiable ? Justifier.

Exercice 4

5 points

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

On considère la série statistique à deux variables :

x_i	1	2	3	4
y_i	5	8	9	12

1) Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal (1 cm pour une unité en abscisse, 1 cm pour une unité en ordonnée), puis calculer les coordonnées de son point moyen G.

2) À l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite de régression de y en x (coefficients arrondis au dixième) et le coefficient de corrélation (arrondi au centième). Tracer cette droite.

3) Estimer y pour $x = 2{,}5$. Cette estimation est-elle une interpolation ou une extrapolation ?

Partie B

Pour une série $(x\,;y)$ à valeurs strictement positives, un changement de variable $z = \ln y$ a conduit à la droite de régression $z = -0{,}5x + 3$.

4) Exprimer y en fonction de x sous la forme $y = K\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$, où K est un réel dont on donnera la valeur exacte puis une valeur arrondie au dixième.

5) Pour quelle valeur de x le modèle donne-t-il $y = 1$?

Bonus

hors barème

On reprend les notations de l'exercice 1 : la droite de régression de y en x a pour équation $y = ax + b$ avec $b = \bar{y} - a\bar{x}$. Pour chaque point du nuage, on appelle *résidu* le nombre $e_i = y_i - (ax_i + b)$.
Démontrer que la somme de tous les résidus est nulle.