Calculatrice autorisée (mode examen)

Durée conseillée indiquée pour chaque exercice.

Exercice 1 — Le sens des moindres carrés (10 min)

4 points

On considère les trois points $A(1\,;2)$, $B(2\,;3)$ et $C(3\,;5)$. On cherche, parmi les droites de coefficient directeur $1{,}5$, c'est-à-dire d'équation $y = 1{,}5x + b$, celle qui « passe au plus près » des trois points.

Pour une valeur de b, on note $S(b)$ la somme des carrés des écarts verticaux entre chaque point et la droite :

$$S(b) = \big(2 - (1{,}5 \times 1 + b)\big)^2 + \big(3 - (1{,}5 \times 2 + b)\big)^2 + \big(5 - (1{,}5 \times 3 + b)\big)^2.$$

1) Calculer les coordonnées du point moyen G des trois points.

2) Montrer que, pour tout réel b, $S(b) = 3b^2 - 2b + 0{,}5$.

3) En déduire la valeur de b pour laquelle $S(b)$ est minimale, et la valeur de ce minimum.

4) Vérifier que la droite obtenue passe par le point G.

Exercice 2 — Le climat se réchauffe (28 min)

9 points

Le tableau donne, pour sept années, la concentration moyenne de dioxyde de carbone dans l'atmosphère x (en ppm, parties par million, mesurée à l'observatoire de Mauna Loa) et l'écart y de la température moyenne mondiale par rapport à la moyenne des années 1951-1980 (en °C). *Valeurs arrondies, d'après la NOAA et la NASA.*

Année	1960	1970	1980	1990	2000	2010	2020
x_i : CO_2 (ppm)	317	326	339	354	370	390	414
y_i : écart de temp. (°C)	$-0{,}03$	$0{,}03$	$0{,}26$	$0{,}45$	$0{,}40$	$0{,}72$	$1{,}01$

Partie A — Un ajustement affine

1) Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal : en abscisse, 1 cm pour 10 ppm en commençant à 310 ; en ordonnée, 1 cm pour $0{,}1$ °C en commençant à $-0{,}1$.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir au centième).

3) **a.** À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, sous la forme $y = ax + b$ (a arrondi à 10^{-4}, b arrondi au centième), ainsi que le coefficient de corrélation r (arrondi au millième).

b. Interpréter la valeur de r.

4) **a.** La concentration de 400 ppm a été atteinte en 2015. Quel écart de température le modèle donne-t-il pour cette concentration (arrondir au dixième) ? L'écart observé en 2015 est de $0{,}90$ °C : commenter.

b. Un scénario prévoit une concentration de 500 ppm vers 2050. Quel écart de température le modèle donne-t-il alors ? Arrondir au dixième.

Partie B — Regard critique

5) Parmi les deux estimations de la question 4), laquelle est une interpolation, laquelle est une extrapolation ? Laquelle est la plus fragile, et pourquoi ?

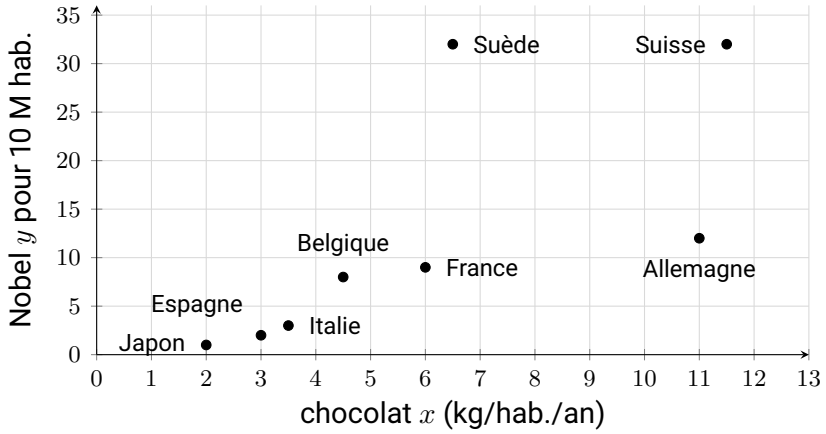
6) Un élève remarque que, sur la même période, la population mondiale est passée de 3 à $7{,}8$ milliards d'habitants et qu'elle est, elle aussi, fortement corrélée à l'écart de température. Il conclut : « corrélation n'est pas causalité, on ne peut donc rien dire du rôle du CO_2 ».
Expliquer en quoi la première partie de sa phrase est juste, puis pourquoi les scientifiques affirment malgré tout que la hausse du CO_2 est une cause du réchauffement.

Exercice 3 — Du chocolat aux prix Nobel (22 min)

7 points

Une étude publiée en 2012 a comparé, pays par pays, la consommation annuelle de chocolat x (en kg par habitant) et le nombre y de prix Nobel pour 10 millions d'habitants. Le tableau donne des valeurs arrondies pour huit pays, et le nuage de points est représenté ci-dessous.

Pays	Suisse	Allemagne	Suède	France	Belgique	Italie	Espagne	Japon
x_i (kg/hab./an)	11,5	11	6,5	6	4,5	3,5	3	2
y_i (Nobel / 10 M hab.)	32	12	32	9	8	3	2	1



1) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir au dixième).

2) À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$ (coefficients arrondis au centième), ainsi que le coefficient de corrélation r (arrondi au centième).

3)
- **a.** Quel nombre de prix Nobel pour 10 millions d'habitants ce modèle prévoit-il pour un pays consommant 9 kg de chocolat par habitant et par an ? S'agit-il d'une interpolation ou d'une extrapolation ?
- **b.** Même question pour un pays consommant 20 kg par habitant et par an. Commenter.

4) Le point de la Suède s'écarte nettement des autres. Déterminer le coefficient de corrélation r' du nuage privé de la Suède (arrondir au centième). Le lien affine paraît-il plus fort ou moins fort ?

5) Un journal a titré : « Manger du chocolat rend intelligent ». Expliquer pourquoi la corrélation observée ne permet pas cette conclusion, et proposer une variable cachée qui pourrait expliquer le lien observé.