Exercice 1 — Quatre questions rapides

2 points

1) $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+6}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$ et $\bar{y} = \dfrac{2+5+5+8}{4} = \dfrac{20}{4} = 5$: le point moyen est $G(3\,;5)$.
Réponse a)

2) Propriété du cours : la droite des moindres carrés passe toujours par le point moyen du nuage.
Réponse c)

3) $r \approx -0{,}97$ est proche de -1 : la corrélation linéaire est forte et négative (quand le temps d'écran augmente, le sommeil diminue). Une corrélation, même forte, ne prouve pas à elle seule une causalité : la réponse b) est fausse. Réponse d)

4) $\ln\left(5\,\mathrm{e}^{0{,}2x}\right) = \ln 5 + \ln\left(\mathrm{e}^{0{,}2x}\right) = \ln 5 + 0{,}2x$. Réponse b)

Exercice 2 — Le café refroidit

7 points

1) On retranche 20 à chaque température :

Temps t (min)	0	2	4	6	8
Écart $y = \theta - 20$	61	48	41	33	26

2) $\bar{t} = \dfrac{0+2+4+6+8}{5} = \dfrac{20}{5} = 4$ et $\bar{z} = \dfrac{4{,}11+3{,}87+3{,}71+3{,}50+3{,}26}{5} = \dfrac{18{,}45}{5} = 3{,}69$.
Le point moyen du nuage $(t\,;z)$ est $G(4\,;3{,}69)$.

3) **a.** $r \approx -0{,}998$ est très proche de -1 : les points $(t\,;z)$ sont presque alignés sur une droite décroissante. L'ajustement affine de z en t est très pertinent, et z diminue quand t augmente.

b. La droite passe par $G(4\,;3{,}69)$, donc $3{,}69 = -0{,}10 \times 4 + b$, soit $b = 3{,}69 + 0{,}40 = 4{,}09$.

$$z = -0{,}10\,t + 4{,}09$$

4) Comme $z = \ln y$, on a $y = \mathrm{e}^{z}$, donc

$$y = \mathrm{e}^{-0{,}10\,t+4{,}09} = \mathrm{e}^{4{,}09} \times \mathrm{e}^{-0{,}1t} \approx 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} \qquad (\mathrm{e}^{4{,}09} \approx 60).$$

Enfin $\theta = y + 20$, d'où $\theta(t) \approx 20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

5) **a.** $\theta(10) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-1} \approx 20 + 60 \times 0{,}37 = 20 + 22{,}2 = 42{,}2$.
Au bout de 10 minutes, le café est à environ $42\,^\circ$C.

b. On résout $\theta(t) = 35$:

$$20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 35 \iff 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} = 15 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1t} = \frac{1}{4}$$
$$\iff -0{,}1t = \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \iff t = 10\ln 4.$$

Or $\ln 4 = \ln\left(2^2\right) = 2\ln 2$, donc $t = 20\ln 2 \approx 20 \times 0{,}69 = 13{,}8$.

$$\boxed{t = 20\ln 2 \text{ min} \approx 14 \text{ min}}$$

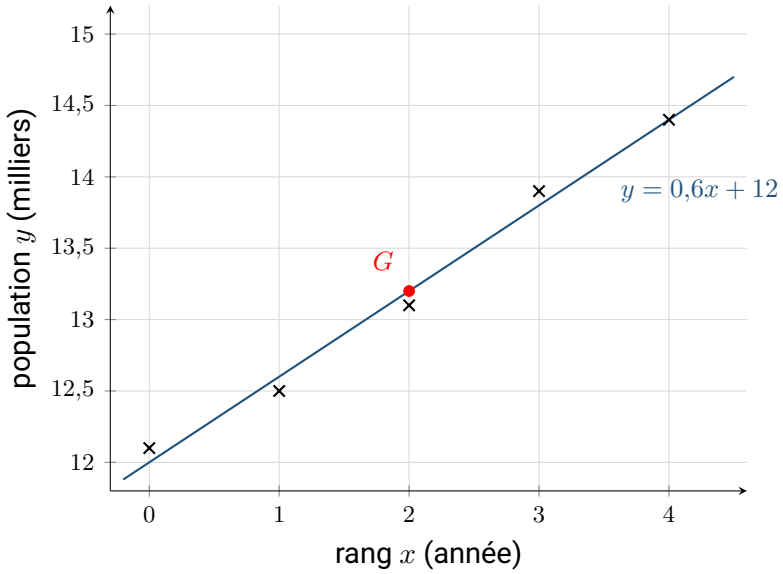
Le café atteint $35\,°$C au bout d'environ 14 minutes.

Exercice 3 — Une commune qui grandit

8 points

Partie A — Un ajustement affine

1) Nuage de points (et droite de régression de la question 4) :



2) $\bar{x} = \dfrac{0+1+2+3+4}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$ et $\bar{y} = \dfrac{12{,}1+12{,}5+13{,}1+13{,}9+14{,}4}{5} = \dfrac{66}{5} = 13{,}2$.
Le point moyen est $\boxed{G(2\,;13{,}2)}$.

3) Tableau complété :

$x_i - \bar{x}$	-2	-1	0	1	2	
$y_i - \bar{y}$	$-1{,}1$	$-0{,}7$	$-0{,}1$	$0{,}7$	$1{,}2$	
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$2{,}2$	$0{,}7$	0	$0{,}7$	$2{,}4$	**Somme :** 6
$(x_i - \bar{x})^2$	4	1	0	1	4	**Somme :** 10

D'où $a = \dfrac{6}{10}$, soit $\boxed{a = 0{,}6}$: selon ce modèle, la population augmente d'environ 600 habitants par an.

4) La droite $y = 0{,}6x + b$ passe par $G(2\,;13{,}2)$: $13{,}2 = 0{,}6 \times 2 + b$, donc $b = 13{,}2 - 1{,}2 = 12$.

$$\boxed{y = 0{,}6x + 12}$$

La droite est tracée sur le graphique de la question 1) ; elle passe par $(0\,;12)$ et $(4\,;14{,}4)$.

5) L'année 2027 correspond au rang $x = 7$: $y = 0{,}6 \times 7 + 12 = 4{,}2 + 12 = 16{,}2$.
Le modèle prévoit $\boxed{\text{environ } 16\,200 \text{ habitants au 1er janvier 2027}}$.
Précaution : $r \approx 0{,}99$ garantit que la droite décrit bien les données de 2020 à 2024, mais $x = 7$ est **en dehors de la plage observée** ($0 \leqslant x \leqslant 4$) : c'est une **extrapolation**. Rien n'assure que la croissance restera régulière (saturation des terrains constructibles, politique de logement, conjoncture) ; l'estimation est à prendre avec prudence.

Partie B — Corrélation et causalité

6) $r' \approx 0{,}98$ indique une corrélation linéaire forte entre la population et le nombre d'abonnés : les deux grandeurs ont augmenté ensemble. Mais $\boxed{\text{une corrélation ne prouve pas une causalité}}$: les deux séries croissent avec le temps, et toute grandeur qui augmente régulièrement sur la période (population, abonnés, mais aussi par exemple le nombre de véhicules) serait fortement corrélée aux autres. Le temps joue ici le rôle de **variable cachée**.
La statistique seule ne permet donc pas de départager les deux élus : l'arrivée d'habitants *et* la gratuité de 2021 peuvent toutes deux contribuer à la hausse. Pour trancher, il faudrait d'autres informations : par exemple la proportion d'abonnés parmi les nouveaux habitants, ou un décrochage du nombre d'abonnements juste après 2021.

Exercice 4 — Redresser un nuage

3 points

1) $z = \ln y$ donc $y = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{0{,}4x+1{,}5} = \mathrm{e}^{1{,}5} \times \mathrm{e}^{0{,}4x}$. Ainsi $y = K\,\mathrm{e}^{0{,}4x}$ avec $\boxed{K = \mathrm{e}^{1{,}5}}$.

2) Pour tout x, $y > 0$ et

$$\ln y = \ln\left(300 \times 0{,}8^{\,x}\right) = \ln 300 + \ln\left(0{,}8^{\,x}\right) = \ln 300 + x \ln 0{,}8.$$

$\ln y$ est donc une fonction affine de x, de coefficient directeur $\ln 0{,}8$ et d'ordonnée à l'origine $\ln 300$. Comme $0{,}8 = \dfrac{4}{5}$: $\boxed{\ln 0{,}8 = 2\ln 2 - \ln 5}$ (valeur négative : y décroît).

3) $r_2 \approx 0{,}998$ est beaucoup plus proche de 1 que $r_1 \approx 0{,}91$: les points $(x\,;\ln y)$ sont presque alignés, alors que les points $(x\,;y)$ le sont nettement moins. On retient donc un ajustement affine de $\ln y$ en x, $\ln y = \alpha x + \beta$, c'est-à-dire $\boxed{\text{un ajustement exponentiel } y = \mathrm{e}^{\beta}\,\mathrm{e}^{\alpha x} \text{ pour } y}$, cohérent avec l'allure du nuage.