Calculatrice interdite

Données utiles (valeurs approchées) : $\ln 2 \approx 0{,}69$; $\mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}37$; $\mathrm{e}^{4{,}09} \approx 60$.

Exercice 1 — Quatre questions rapides

2 points

Pour chaque question, une seule des quatre réponses est exacte ; indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre choisie. **Aucune justification n'est demandée** ; une réponse fausse n'enlève pas de point.

1) Le point moyen du nuage formé des points $(1\,;2)$, $(2\,;5)$, $(3\,;5)$ et $(6\,;8)$ a pour coordonnées :

a) $(3\,;5)$ b) $(2\,;5)$ c) $(3\,;4)$ d) $(12\,;20)$

2) La droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés passe toujours par :

a) l'origine du repère
b) le premier point du nuage
c) le point moyen du nuage
d) aucun point particulier en général

3) Dans un groupe d'adolescents, le coefficient de corrélation entre le temps quotidien passé devant un écran et la durée de sommeil vaut $r \approx -0{,}97$. On peut affirmer que :

a) les deux variables sont indépendantes
b) les écrans sont nécessairement la cause du manque de sommeil
c) la corrélation linéaire est faible
d) la corrélation linéaire est forte et négative

4) Si $y = 5\,\mathrm{e}^{0{,}2x}$, alors $z = \ln y$ est égal à :

a) $5 + 0{,}2x$ b) $0{,}2x + \ln 5$ c) $0{,}2\ln x + \ln 5$ d) $\ln(0{,}2x) + 5$

Exercice 2 — Le café refroidit

7 points

Un café est servi à $81\,°$C dans une pièce dont la température est constante, égale à $20\,°$C. On relève sa température θ (en °C) toutes les deux minutes.

Temps t (min)	0	2	4	6	8
Température θ (°C)	81	68	61	53	46
Écart $y = \theta - 20$	61				
$z = \ln y$ (arrondi au centième)	4,11	3,87	3,71	3,50	3,26

1) Recopier et compléter la ligne des écarts $y = \theta - 20$.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points $(t\,;z)$.

3) Un logiciel donne, pour le nuage $(t\,;z)$, un coefficient de corrélation $r \approx -0{,}998$ et une droite de régression de z en t de coefficient directeur $-0{,}10$ (arrondi au centième).

a. Que traduit la valeur de r pour le nuage $(t\,;z)$?

b. En utilisant le point G, déterminer l'ordonnée à l'origine b de cette droite, puis écrire son équation réduite $z = -0{,}10\,t + b$.

4) En déduire que la température du café peut être modélisée par $\theta(t) \approx 20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

5) On utilise désormais le modèle $\theta(t) = 20 + 60\,\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.

a. Estimer la température du café au bout de 10 minutes.

b. Au bout de combien de temps le café atteint-il $35\,°$C ? Donner la valeur exacte, puis une valeur arrondie à la minute.

Exercice 3 — Une commune qui grandit

8 points

Partie A — Un ajustement affine

Le tableau donne la population d'une commune périurbaine, en milliers d'habitants, au 1er janvier de chaque année de 2020 à 2024. On note x le rang de l'année ($x = 0$ pour 2020) et y la population en milliers.

Année	2020	2021	2022	2023	2024
Rang x_i	0	1	2	3	4
Population y_i (milliers)	12,1	12,5	13,1	13,9	14,4

1) Représenter le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ dans un repère orthogonal (abscisses : 2 cm pour une année ; ordonnées : de 12 à 15, 2 cm pour $0{,}5$ millier).

2) Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage.

3) Le coefficient directeur de la droite de régression de y en x est donné par $a = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous, puis calculer a.

$x_i - \bar{x}$	-2					
$y_i - \bar{y}$	$-1{,}1$					
$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$2{,}2$					**Somme :**
$(x_i - \bar{x})^2$	4					**Somme :**

4) Sachant que la droite de régression passe par G, déterminer son ordonnée à l'origine b et écrire son équation réduite. Tracer cette droite sur le graphique de la question 1).

5) Un logiciel donne $r \approx 0{,}99$ pour ce nuage. Estimer, à l'aide de ce modèle, la population de la commune au 1er janvier 2027. Quelle précaution appelle cette estimation ?

Partie B — Corrélation et causalité

Sur la même période, le nombre d'abonnés à la médiathèque municipale est passé de $1\,800$ à $3\,000$, et le coefficient de corrélation entre la population y et le nombre d'abonnés vaut $r' \approx 0{,}98$. Un premier élu affirme : « c'est l'arrivée des nouveaux habitants qui explique la hausse des abonnements » ; un second répond : « non, c'est la gratuité de l'abonnement, décidée en 2021 ».

6) La valeur de r' permet-elle de trancher entre ces deux explications ? Argumenter en quelques lignes.

Exercice 4 — Redresser un nuage

3 points

Les trois questions sont indépendantes.

1) Pour une série $(x\,;y)$ à valeurs strictement positives, on a posé $z = \ln y$ et obtenu la droite de régression $z = 0{,}4x + 1{,}5$. Exprimer y en fonction de x sous la forme $y = K\,\mathrm{e}^{0{,}4x}$, où K est un réel à préciser.

2) Une grandeur y dépend d'un nombre x suivant le modèle $y = 300 \times 0{,}8^{\,x}$. Montrer que $\ln y$ est une fonction affine de x et préciser son coefficient directeur sous la forme d'une expression exacte avec des logarithmes.

3) Pour un nuage dont les points semblent s'aligner sur une courbe de type exponentiel, on a calculé le coefficient de corrélation de la série $(x\,;y)$: $r_1 \approx 0{,}91$, et celui de la série $(x\,;\ln y)$: $r_2 \approx 0{,}998$. Quel ajustement doit-on retenir pour y ? Justifier.