Exercice 1 — Vrai ou faux ?

3 points

1) FAUX. Une loi binomiale compte les succès d'une répétition d'épreuves de Bernoulli *identiques et indépendantes*. Ici les tirages se font sans remise : la composition de l'urne change à chaque tirage, donc les épreuves ne sont ni identiques ni indépendantes.
Contre-exemple : au premier tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$; si la première boule tirée est rouge, la probabilité que la deuxième le soit aussi est $\frac{7}{19} \neq \frac{2}{5}$. X ne suit donc pas une loi binomiale (il en suivrait une avec remise).

2) VRAI. L'évènement contraire de $\{X \geqslant 1\}$ est $\{X = 0\}$ et, pour X suivant la loi $\mathcal{B}(20\,;\,0{,}3)$:

$$P(X=0) = \binom{20}{0} 0{,}3^0\, 0{,}7^{20} = 0{,}7^{20}, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}7^{20}} \ (\approx 0{,}999).$$

3) FAUX. Pour X suivant la loi géométrique de paramètre $0{,}25$, $\{X > 2\}$ est « les deux premières épreuves sont des échecs », de probabilité $0{,}75^2$:

$$P(X \leqslant 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - 0{,}75^2 = 1 - 0{,}562\,5 = \boxed{0{,}437\,5 \neq 0{,}5}.$$

Autre calcul : $P(X=1) + P(X=2) = 0{,}25 + 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}25 + 0{,}187\,5 = 0{,}437\,5$.

Exercice 2 — Calculatrice en main

5 points

X suit la loi $\mathcal{B}(25\,;\,0{,}2)$: pour tout entier k de 0 à 25, $P(X=k) = \binom{25}{k} 0{,}2^k\, 0{,}8^{25-k}$. Les valeurs sont obtenues avec les fonctions de la calculatrice (`binomFdp` / `binomFRép`, ou `BinomPD` / `BinomCD`).

1) $P(X=4) = \binom{25}{4} 0{,}2^4\, 0{,}8^{21} = 0{,}186\,7\ldots$, soit $\boxed{P(X=4) \approx 0{,}187}$.

2) $P(X \leqslant 5) = P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=5) = 0{,}616\,7\ldots$, soit $\boxed{P(X \leqslant 5) \approx 0{,}617}$.

3) L'évènement contraire de $\{X \geqslant 3\}$ est $\{X \leqslant 2\}$:

$$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - 0{,}098\,2\ldots, \qquad \boxed{P(X \geqslant 3) \approx 0{,}902}.$$

4) Pour la loi $\mathcal{B}(n\,;\,p)$, $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$:

$$E(X) = 25 \times 0{,}2 = \boxed{5} \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{25 \times 0{,}2 \times 0{,}8} = \sqrt{4} = \boxed{2}.$$

L'espérance est le nombre moyen de succès que l'on obtient sur 25 épreuves lorsqu'on répète un grand nombre de fois le schéma de Bernoulli : en moyenne 5 succès sur 25.

Exercice 3 — Collecte de sang

7 points

Partie A — Une collecte ordinaire

1) Pour chaque donneur, on regarde s'il est de groupe O négatif : c'est une épreuve de Bernoulli de succès « le donneur est O négatif », de probabilité $0{,}06$. Le tirage étant assimilé à un tirage avec remise, les 50 épreuves sont identiques et indépendantes, et X compte les succès : $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(50\,;\,0{,}06)}$.

2)

$$P(X=3) = \binom{50}{3} 0{,}06^3\, 0{,}94^{47} = 0{,}231\,1\ldots, \qquad \boxed{P(X=3) \approx 0{,}231}.$$

3) L'évènement contraire de $\{X \geqslant 2\}$ est $\{X \leqslant 1\}$:

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X \leqslant 1) = 1 - 0{,}190\,0\ldots, \qquad \boxed{P(X \geqslant 2) \approx 0{,}810}.$$

Dans environ $81\,\%$ des collectes de 50 donneurs, au moins deux sont de groupe O négatif.

4) $E(X) = np = 50 \times 0{,}06$, soit $\boxed{E(X) = 3}$: sur un grand nombre de collectes de 50 donneurs, on recueille en moyenne 3 poches de sang O négatif par collecte.
Le souhait est réalisé lorsque $X \geqslant 5$:

$$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X \leqslant 4) = 1 - 0{,}820\,5\ldots, \qquad \boxed{P(X \geqslant 5) \approx 0{,}179}.$$

Commentaire : avec 50 donneurs, l'objectif de 5 poches n'est atteint qu'environ une fois sur cinq ou six ; il est nettement au-dessus de la moyenne 3. Pour l'atteindre régulièrement, il faudrait accueillir davantage de donneurs ou solliciter spécifiquement les donneurs O négatif.

Partie B — Une collecte étonnante

1) Avec X suivant la loi $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}06)$:

$$P(X \geqslant 8) = 1 - P(X \leqslant 7) = 1 - 0{,}990\,5\ldots, \qquad \boxed{P(X \geqslant 8) \approx 0{,}009}.$$

2) Si la proportion de personnes O négatif était de $6\,\%$ dans ce village, observer au moins 8 donneurs O négatif sur 50 aurait une probabilité d'environ $0{,}9\,\%$, soit moins d'une collecte sur cent : c'est un évènement très rare dans ce modèle. On a donc de bonnes raisons de douter que la proportion soit de $6\,\%$ dans ce village (une population isolée peut avoir une répartition des groupes sanguins différente de la moyenne nationale). $\boxed{\text{Oui, le résultat conduit à remettre en cause le modèle.}}$
Remarque : ce n'est pas une preuve ; un évènement de probabilité $0{,}9\,\%$ peut se produire. Une seconde collecte permettrait de confirmer.

Exercice 4 — L'archère et le premier succès

5 points

1) Chaque tir est une épreuve de Bernoulli de succès « atteindre le centre », de probabilité $0{,}3$; les tirs sont indépendants et X est le rang du premier succès.
$\boxed{X \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 0{,}3}$.

2) Il faut trois échecs puis un succès :

$$P(X=4) = 0{,}7^3 \times 0{,}3 = 0{,}343 \times 0{,}3 = 0{,}102\,9, \qquad \boxed{P(X=4) \approx 0{,}103}.$$

3) L'évènement $\{X > n\}$ signifie que le premier succès arrive après le n-ième tir, c'est-à-dire que les n premiers tirs sont tous des échecs. Les tirs étant indépendants, chacun étant un échec avec la probabilité $0{,}7$:

$$\boxed{P(X > n) = 0{,}7^n}.$$

Échouer lors des cinq premiers tirs, c'est l'évènement $\{X > 5\}$:

$$P(X > 5) = 0{,}7^5 = 0{,}168\,07, \qquad \boxed{P(X > 5) \approx 0{,}168}.$$

4) Atteindre le centre au moins une fois en n tirs est l'évènement $\{X \leqslant n\}$, de probabilité $1 - P(X > n) = 1 - 0{,}7^n$. On cherche le plus petit entier n tel que

$$1 - 0{,}7^n > 0{,}99 \iff 0{,}7^n < 0{,}01.$$

La suite $(0{,}7^n)$ est décroissante (raison $0{,}7 \in]0\,;1[$). Avec un tableau de valeurs à la calculatrice :

$$0{,}7^{12} \approx 0{,}013\,8 > 0{,}01 \qquad \text{et} \qquad 0{,}7^{13} \approx 0{,}009\,7 < 0{,}01.$$

(On peut aussi résoudre $0{,}7^n < 0{,}01 \iff n \ln 0{,}7 < \ln 0{,}01 \iff n > \dfrac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7} \approx 12{,}9$, car $\ln 0{,}7 < 0$.)
Elle doit prévoir $\boxed{13 \text{ tirs}}$ au minimum.

5) On sait que les trois premiers tirs sont manqués : $X > 3$. On cherche $P_{X>3}(X \leqslant 5)$. L'évènement contraire de $\{X \leqslant 5\}$ est $\{X > 5\}$, et $\{X > 5\} \subset \{X > 3\}$:

$$P_{X>3}(X > 5) = \frac{P(X > 5 \cap X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(X > 5)}{P(X > 3)} = \frac{0{,}7^5}{0{,}7^3} = 0{,}7^2 = P(X > 2)$$

(c'est l'absence de mémoire de la loi géométrique). Donc

$$P_{X>3}(X \leqslant 5) = 1 - 0{,}7^2 = 1 - 0{,}49, \qquad \boxed{P_{X>3}(X \leqslant 5) = 0{,}51}.$$

Interprétation : après trois échecs, tout se passe comme si l'archère recommençait à zéro : la probabilité de réussir dans les deux tirs suivants est la même que celle de réussir dans ses deux premiers tirs, $1 - 0{,}7^2 = 0{,}51$.