Calculatrice autorisée (mode examen)
Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1 — Vrai ou faux ?

3 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Une urne contient 20 boules dont 8 rouges. On tire successivement et **sans remise** 5 boules et on note X le nombre de boules rouges obtenues. Alors X suit une loi binomiale.

2) Si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;\,0{,}3)$, alors $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}7^{20}$.

3) Si X suit la loi géométrique de paramètre $0{,}25$, alors $P(X \leqslant 2) = 0{,}5$.

Exercice 2 — Calculatrice en main

5 points

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(25\,;\,0{,}2)$. Les probabilités demandées seront arrondies au millième.

1) Calculer $P(X = 4)$.

2) Calculer $P(X \leqslant 5)$.

3) Calculer $P(X \geqslant 3)$.

4) Calculer l'espérance et l'écart type de X. Que représente l'espérance pour un schéma de Bernoulli ?

Exercice 3 — Collecte de sang

7 points

Les personnes de groupe sanguin O négatif sont des « donneurs universels » : leurs globules rouges peuvent être transfusés à n'importe quel patient. En France, $6\,\%$ de la population est de groupe O négatif.

Lors d'une collecte, 50 donneurs se présentent. On admet que le choix de ces 50 donneurs peut être assimilé à un tirage avec remise dans la population française, et on note X le nombre de donneurs de groupe O négatif parmi eux.

Partie A — Une collecte ordinaire

1) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2) Calculer la probabilité qu'exactement 3 donneurs soient de groupe O négatif. Arrondir au millième.

3) Calculer la probabilité qu'au moins 2 donneurs soient de groupe O négatif. Arrondir au millième.

4) Calculer l'espérance de X et interpréter ce nombre. L'établissement de transfusion souhaite recueillir au moins 5 poches de sang O négatif lors de cette collecte : calculer la probabilité que ce souhait soit réalisé (arrondir au millième) et commenter.

Partie B — Une collecte étonnante

Lors d'une collecte organisée dans un village isolé, 8 donneurs sur les 50 qui se sont présentés sont de groupe O négatif.

1) En supposant que le modèle de la partie A s'applique encore, calculer la probabilité d'observer au moins 8 donneurs de groupe O négatif parmi 50. Arrondir au millième.

2) Ce résultat permet-il de douter que la proportion de personnes de groupe O négatif soit de $6\,\%$ dans ce village ? Argumenter.

Exercice 4 — L'archère et le premier succès

5 points

À l'entraînement, une archère débutante atteint le centre de la cible avec la probabilité $0{,}3$ à chaque tir, et les tirs sont indépendants les uns des autres. Elle tire jusqu'à atteindre le centre pour la première fois. On note X le rang du premier tir réussi.

1) Justifier que X suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

2) Calculer la probabilité qu'elle réussisse pour la première fois au quatrième tir. Arrondir au millième.

3) Soit n un entier naturel non nul. Justifier que $P(X > n) = 0{,}7^n$, puis calculer la probabilité qu'elle échoue lors de ses cinq premiers tirs. Arrondir au millième.

4) Combien de tirs, au minimum, doit-elle prévoir pour que la probabilité d'atteindre le centre au moins une fois soit supérieure à $0{,}99$? *On pourra utiliser la calculatrice.*

5) Elle a manqué ses trois premiers tirs. Quelle est la probabilité qu'elle atteigne le centre au plus tard au cinquième tir ? Justifier.