Exercice 1

4 points

1) VRAI. Pour une loi de Bernoulli de paramètre p, $V(X) = p(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$. Ici :

$$V(X) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16 \qquad \text{et} \qquad \sigma(X) = \sqrt{0{,}16} = \boxed{0{,}4}.$$

2) FAUX. Pour la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$, $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$. Avec $n = 10$:

$$E(X) = \frac{1+2+\cdots+10}{10} = \frac{55}{10} = \boxed{5{,}5 \neq 5}.$$

3) VRAI. Comme $P(B) = 0{,}4 \neq 0$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = \boxed{0{,}5}.$$

4) FAUX. Pour une loi géométrique de paramètre p, $P(X = 1) = p$ et $P(X = 2) = (1-p)\,p$, donc

$$P(X \leqslant 2) = p + (1-p)\,p = 2p - p^2,$$

ce qui n'est pas égal à $2p$ dès que $p \neq 0$. *Contre-exemple :* pour $p = 0{,}5$,

$$P(X \leqslant 2) = 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = \boxed{0{,}75}, \qquad \text{alors que } 2p = 1.$$

Exercice 2

10,5 points

1) **a.** Chaque nombre est la somme des deux nombres situés juste au-dessus de lui (les bords valent 1) :

$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1
$n=6$	1	6	**15**	20	**15**	6	1

b. Sur la ligne $n = 6$, $\binom{6}{k}$ est le $(k+1)$-ième nombre : $\boxed{\binom{6}{2} = 15}$ et $\boxed{\binom{6}{4} = 15}$.

$\binom{6}{2}$ est le nombre de façons d'obtenir exactement 2 succès dans un schéma de Bernoulli de 6 épreuves, c'est-à-dire le nombre de chemins de l'arbre comportant 2 succès et 4 échecs. Choisir la place des 2 succès revient exactement à choisir la place des 4 échecs : il y a donc autant de chemins à 2 succès que de chemins à 4 succès, d'où $\binom{6}{2} = \binom{6}{4}$ (symétrie du triangle de Pascal).

2) **a.** Le dé est équilibré : les 8 numéros ont la même probabilité $\frac{1}{8}$.
$\boxed{X \text{ suit la loi uniforme sur } \{1\,;2\,;\ldots\,;8\}}$.
L'évènement $\{X \geqslant 6\}$ est réalisé par les numéros 6, 7 et 8 :

$$P(X \geqslant 6) = \frac{3}{8}, \qquad \boxed{P(X \geqslant 6) = 0{,}375}.$$

b. $E(X) = \dfrac{1+2+\cdots+8}{8} = \dfrac{36}{8} = \dfrac{8+1}{2}$, soit $\boxed{E(X) = 4{,}5}$.
Interprétation : sur un grand nombre de lancers, la moyenne des numéros obtenus est proche de $4{,}5$.

3) **a.** Pour une loi de Bernoulli, $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$, donc $\sigma(X)^2 = p(1-p)$. Avec $\sigma(X) = 0{,}3$:

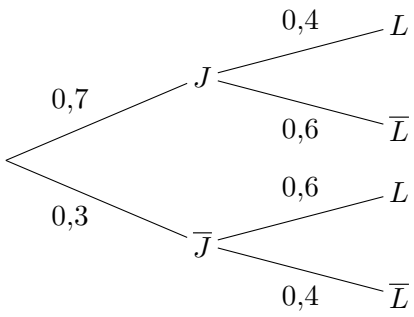
$$p(1-p) = 0{,}09 \iff p - p^2 = 0{,}09 \iff \boxed{p^2 - p + 0{,}09 = 0}.$$

b. Trinôme de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}09 = 1 - 0{,}36 = 0{,}64 = 0{,}8^2 > 0$, de racines

$$p_1 = \frac{1-0{,}8}{2} = 0{,}1 \qquad \text{et} \qquad p_2 = \frac{1+0{,}8}{2} = 0{,}9.$$

Comme $p < 0{,}5$: $\boxed{p = 0{,}1}$. Pour une loi de Bernoulli, $E(X) = p$, donc $\boxed{E(X) = 0{,}1}$.

4) **a.** $P(J) = 0{,}7$, $P(\overline{J}) = 0{,}3$, $P_J(L) = 0{,}4$, $P_{\overline{J}}(L) = 0{,}6$:



b. J et $\overline{J}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(L) = P(J)\,P_J(L) + P(\overline{J})\,P_{\overline{J}}(L) = 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}28 + 0{,}18, \qquad \boxed{P(L) = 0{,}46}.$$

c. On cherche $P_L(J)$; comme $P(L) = 0{,}46 \neq 0$:

$$P_L(J) = \frac{P(J \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}28}{0{,}46} = \frac{14}{23}, \qquad \boxed{P_L(J) \approx 0{,}609}.$$

Un patient qui a attendu plus d'une heure est arrivé en journée dans environ $61\,\%$ des cas.

5) X suit la loi géométrique de paramètre $p = 0{,}2$: pour tout entier $k \geqslant 1$, $P(X = k) = 0{,}8^{k-1} \times 0{,}2$, et $P(X > k) = 0{,}8^k$.

a. $P(X = 3) = 0{,}8^2 \times 0{,}2 = 0{,}64 \times 0{,}2$, soit $\boxed{P(X = 3) = 0{,}128}$.

b. L'évènement contraire de $\{X \leqslant 3\}$ est $\{X > 3\}$: « les trois premières épreuves sont des échecs ».

$P(X \leqslant 3) = 1 - P(X > 3) = 1 - 0{,}8^3 = 1 - 0{,}512$, soit $\boxed{P(X \leqslant 3) = 0{,}488}$.
Vérification : $0{,}2 + 0{,}16 + 0{,}128 = 0{,}488$.

c. $P(X > 5) = 0{,}8^5 = 0{,}327\,68$, soit $\boxed{P(X > 5) \approx 0{,}328}$.

d. $E(X) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{0{,}2}$, soit $\boxed{E(X) = 5}$.

Exercice 3

5,5 points

1) Chaque année est une épreuve de Bernoulli dont le succès « une crue décennale survient » a pour probabilité $0{,}1$; les années sont indépendantes et X est le rang de la première année où le succès se produit. Donc $\boxed{X \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 0{,}1}$.

2) $P(X = 1) = \boxed{0{,}1}$ (crue dès l'année 1) et $P(X = 2) = 0{,}9 \times 0{,}1 = \boxed{0{,}09}$ (pas de crue l'année 1, puis une crue l'année 2).

3) L'évènement $\{X > n\}$ signifie « la première crue survient après l'année n », c'est-à-dire « aucune crue décennale n'a lieu pendant les n premières années ». Les années étant indépendantes et sans crue avec la probabilité $0{,}9$ chacune :

$$P(X > n) = \underbrace{0{,}9 \times 0{,}9 \times \cdots \times 0{,}9}_{n \text{ facteurs}} = \boxed{0{,}9^n}.$$

Pour $n = 10$: $P(X > 10) = 0{,}9^{10} = 0{,}348\,678\ldots$, soit $\boxed{P(X > 10) \approx 0{,}349}$.
Interprétation : il y a environ $35\,\%$ de chances qu'aucune crue décennale ne survienne pendant les dix premières années qui suivent la construction de la digue (et donc environ $65\,\%$ de chances qu'il y en ait au moins une).

4) Fin 2031, cinq années se sont écoulées sans crue : on sait que $X > 5$. On veut la probabilité qu'il n'y ait toujours pas eu de crue fin 2041, c'est-à-dire après 15 années : on cherche $P_{X>5}(X > 15)$. Comme $\{X > 15\} \subset \{X > 5\}$:

$$P_{X>5}(X > 15) = \frac{P(X > 15 \cap X > 5)}{P(X > 5)} = \frac{P(X > 15)}{P(X > 5)} = \frac{0{,}9^{15}}{0{,}9^5} = 0{,}9^{10},$$

$$\boxed{P_{X>5}(X > 15) = P(X > 10) \approx 0{,}349}.$$

C'est la propriété d'**absence de mémoire** de la loi géométrique : les cinq années passées sans crue ne changent rien aux chances des dix années suivantes, qui restent celles de dix années quelconques. La digue n'est pas « en sursis » parce qu'il n'y a pas eu de crue.

5) Pour une loi géométrique, $E(X) = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{0{,}1}$, donc $\boxed{E(X) = 10}$.
Interprétation : en moyenne, la première crue survient au bout de dix ans ; une crue de probabilité annuelle $0{,}1$ revient donc en moyenne tous les dix ans, d'où le nom de crue « décennale » (dix ans est sa *période de retour*). Cela n'interdit nullement deux crues décennales en deux années consécutives.