*Calculatrice autorisée (mode examen)*
*Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de son choix; un résultat non démontré peut être admis pour la suite.*

## Exercice 1

**4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier**. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

**1)** Si $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $0{,}2$, alors son écart type est $\sigma(X) = 0{,}4$.

**2)** Si $X$ suit la loi uniforme sur $\{1\,;2\,;\ldots\,;10\}$, alors $E(X) = 5$.

**3)** Si $A$ et $B$ sont deux évènements tels que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$, alors $P_B(A) = 0{,}5$.

**4)** Si $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$, alors $P(X \leqslant 2) = 2p$.

## Exercice 2

**10,5 points**

*Les cinq questions de cet exercice sont indépendantes.*

**1)** On a commencé à écrire le triangle de Pascal :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n = 0$ | 1 | | | |
| $n = 1$ | 1 | 1 | | |
| $n = 2$ | 1 | 2 | 1 | |
| $n = 3$ | 1 | 3 | 3 | 1 |

**a.** Recopier ce triangle et le compléter jusqu'à la ligne $n = 6$.

**b.** En déduire les coefficients binomiaux $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{4}$. Expliquer, à l'aide de la définition d'un coefficient binomial, pourquoi ils sont égaux.

**2)** Dans un jeu de rôle, on lance un dé équilibré à $8$ faces numérotées de $1$ à $8$. On note $X$ le numéro obtenu.

**a.** Quelle loi suit $X$ ? Calculer $P(X \geqslant 6)$.

**b.** Calculer $E(X)$ et interpréter ce nombre.

**3)** Une variable aléatoire $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$, avec $p < 0{,}5$. On sait que son écart type est $\sigma(X) = 0{,}3$.

**a.** Montrer que $p$ est solution de l'équation $p^2 - p + 0{,}09 = 0$.

**b.** En déduire la valeur de $p$, puis $E(X)$.

**4)** Dans un service d'urgences, $70\,\%$ des patients arrivent en journée et les autres la nuit. En journée, $40\,\%$ des patients attendent plus d'une heure avant d'être pris en charge ; la nuit, cette proportion est de $60\,\%$.
On choisit un patient au hasard et on note $J$ l'évènement « le patient arrive en journée » et $L$ l'évènement « le patient attend plus d'une heure ».

**a.** Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

**b.** Calculer $P(L)$.

**c.** Un patient a attendu plus d'une heure. Quelle est la probabilité qu'il soit arrivé en journée ? Arrondir au millième.

**5)** Une variable aléatoire $X$ suit la loi géométrique de paramètre $0{,}2$.

**a.** Calculer $P(X = 3)$.

**b.** Calculer $P(X \leqslant 3)$.

**c.** Calculer $P(X > 5)$. Arrondir au millième.

**d.** Donner $E(X)$.

## Exercice 3

**5,5 points**

Une *crue décennale* est une crue qui a, chaque année, une probabilité $0{,}1$ de se produire, indépendamment de ce qui s'est passé les années précédentes. Une commune achève une digue fin 2026. On numérote les années suivantes : $2027$ est l'année $1$, $2028$ l'année $2$, etc. On note $X$ la variable aléatoire égale au numéro de la première année où survient une crue décennale.

**1)** Justifier que $X$ suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

**2)** Calculer $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

**3)** Soit $n$ un entier naturel non nul. Expliquer pourquoi $P(X > n) = 0{,}9^n$, puis calculer $P(X > 10)$, arrondie au millième. Interpréter ce résultat.

**4)** Fin 2031, aucune crue décennale n'a eu lieu depuis la construction de la digue. Quelle est la probabilité qu'il n'y en ait toujours pas eu fin 2041 ? Justifier avec soin.

**5)** Calculer $E(X)$. Pourquoi parle-t-on de crue « décennale » ?