Exercice 1

4 points

1) **a.** Quatre lancers identiques et indépendants, chacun avec un succès « obtenir 6 » de probabilité $\frac{1}{6}$; X compte les succès : $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(4\,;\,\frac{1}{6}\right)}$.

b. On répète la même épreuve jusqu'au premier succès et X est le rang de ce premier succès : $\boxed{X \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{6}}$.

c. Une seule épreuve à deux issues ; le jeu compte 8 cœurs sur 32 cartes, donc $P(X=1) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$: $\boxed{X \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{4}}$.

2) **a.** Chaque nombre est la somme des deux nombres situés juste au-dessus de lui :

$n=0$	1				
$n=1$	1	1			
$n=2$	1	2	1		
$n=3$	1	3	3	1	
$n=4$	1	4	**6**	4	1

Le coefficient $\binom{4}{2}$ est le troisième nombre de la ligne $n=4$: $\boxed{\binom{4}{2} = 6}$.

b. Pour X suivant la loi $\mathcal{B}\left(4\,;\,\frac{1}{2}\right)$, $P(X=k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\binom{4}{k}}{16}$.

$$P(X=2) = \frac{6}{16}, \qquad \boxed{P(X=2) = \frac{3}{8}}.$$

$$P(X \leqslant 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16}, \qquad \boxed{P(X \leqslant 1) = \frac{5}{16}}.$$

3) On calcule les probabilités cumulées en ajoutant les termes $\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16}$:

$$P(X \leqslant 2) = \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16} = 0{,}687\,5 < 0{,}9$$

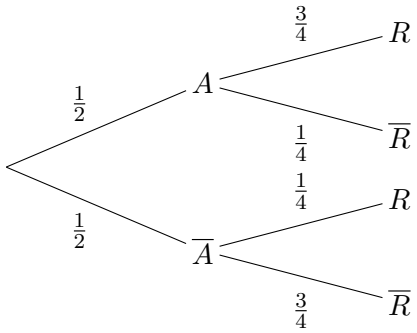
$$P(X \leqslant 3) = \frac{11}{16} + \frac{4}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}937\,5 \geqslant 0{,}9.$$

Le plus petit entier cherché est donc $\boxed{k=3}$: on a $P(X \in [0\,;3]) \geqslant 0{,}9$.

Exercice 2

8 points

1) La pièce est équilibrée : $P(A) = P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$. Dans l'urne A, 3 boules sur 4 sont rouges : $P_A(R) = \frac{3}{4}$; dans l'urne B, 1 sur 4 : $P_{\overline{A}}(R) = \frac{1}{4}$.



A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A)\,P_A(R) + P(\overline{A})\,P_{\overline{A}}(R) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}, \qquad \boxed{P(R) = \frac{1}{2}}.$$

2) **a.** `random()` renvoie un nombre de $[0\,;1[$; la condition `random() < p` est vraie avec la probabilité p. La fonction renvoie donc 1 avec la probabilité p et 0 sinon : la variable aléatoire égale à la valeur renvoyée suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

b. `p` est la probabilité que la boule tirée soit rouge : $\frac{3}{4} = 0{,}75$ dans l'urne A, $\frac{1}{4} = 0{,}25$ dans l'urne B :

```
p = 0.75     # urne A
...
p = 0.25     # urne B
```

3) **a.** La boucle répète n fois l'expérience. `rouges` compte les tirages ayant donné une boule rouge et `rougesA` ceux où, de plus, la boule venait de l'urne A. La fonction renvoie donc **la fréquence des tirages issus de l'urne A parmi les tirages ayant donné une boule rouge** (sur les n expériences simulées).

b. Sur un grand nombre de répétitions, cette fréquence se stabilise autour de la probabilité conditionnelle $P_R(A)$: la probabilité que la boule vienne de l'urne A *sachant* qu'elle est rouge. Comme $P(R) = \frac{1}{2} \neq 0$:

$$P_R(A) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{P(A)\,P_A(R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}, \qquad \boxed{P_R(A) = \frac{3}{4} = 0{,}75}.$$

La valeur $0{,}751\,2$ renvoyée par le programme en est bien une estimation : une boule rouge vient trois fois sur quatre de l'urne A.

4) **a.** Si le premier tirage donne une boule verte, la variable `couleur` vaut `"V"` et n'est plus jamais modifiée dans la boucle : la condition `couleur == "V"` reste vraie et la boucle ne s'arrête jamais (seul `k` augmente). Il faut refaire un tirage à chaque passage dans la boucle :

```
def rang():
    k = 1
    urne, couleur = tirage()
    while couleur == "V":
        k = k + 1
        urne, couleur = tirage()
    return k
```

b. Chaque appel de `tirage()` est une épreuve de Bernoulli indépendante des précédentes, dont le succès « la boule est rouge » a pour probabilité $P(R) = \dfrac{1}{2}$ (question 1). K est le rang du premier succès : $\boxed{K \text{ suit la loi géométrique de paramètre } \frac{1}{2}}$.

$$P(K=3) = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}, \qquad \boxed{P(K=3) = \frac{1}{8}}.$$

$$E(K) = \frac{1}{p} = \frac{1}{1/2}, \qquad \boxed{E(K) = 2}.$$

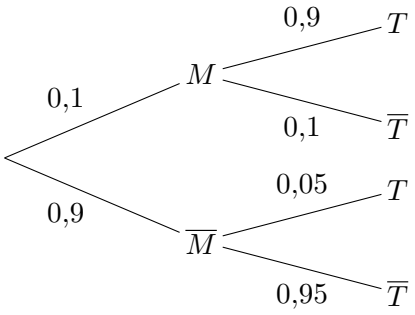
En moyenne, il faut deux tirages pour obtenir une première boule rouge.

Exercice 3

8 points

Partie A — Hors période épidémique

1) $P(M) = 0{,}1$, donc $P(\overline{M}) = 0{,}9$. La sensibilité donne $P_M(T) = 0{,}9$, d'où $P_M(\overline{T}) = 0{,}1$; la spécificité donne $P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0{,}95$, d'où $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}05$.



2)

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0{,}1 \times 0{,}9, \qquad \boxed{P(M \cap T) = 0{,}09}.$$

3) M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers ; d'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0{,}09 + 0{,}9 \times 0{,}05 = 0{,}09 + 0{,}045, \qquad \boxed{P(T) = 0{,}135}.$$

4) On cherche $P_T(M)$. Comme $P(T) = 0{,}135 \neq 0$:

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}09}{0{,}135} = \frac{90}{135} = \frac{2 \times 45}{3 \times 45}, \qquad \boxed{P_T(M) = \frac{2}{3}}.$$

Interprétation : hors épidémie, un patient dont le test est positif n'a la grippe que deux fois sur trois ($\approx 67\,\%$) ; un test positif sur trois est un « faux positif ». Le médecin ne peut pas conclure à la grippe sur ce seul résultat.

5) On reprend le même arbre avec $P(M) = P(\overline{M}) = 0{,}5$:

$$P(T) = 0{,}5 \times 0{,}9 + 0{,}5 \times 0{,}05 = 0{,}45 + 0{,}025 = 0{,}475,$$

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}45}{0{,}475} = \frac{450}{475} = \frac{18 \times 25}{19 \times 25}, \qquad \boxed{P_T(M) = \frac{18}{19} \approx 0{,}95}.$$

Commentaire : le test n'a pas changé, mais en pleine épidémie un test positif est fiable à $95\,\%$ environ, contre $67\,\%$ hors épidémie. La valeur d'un test positif dépend fortement de la proportion de malades parmi les personnes testées (la probabilité *a priori*).

Partie B — Quatre patients

1) Pour chacun des quatre patients testés positifs, on regarde s'il a réellement la grippe : c'est une épreuve de Bernoulli de succès « le patient a la grippe », de probabilité $P_T(M) = \frac{2}{3}$ (partie A, question 4). Les quatre patients étant sans lien entre eux, les quatre épreuves sont identiques et indépendantes ; Y compte les succès : $\boxed{Y \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(4\,;\,\frac{2}{3}\right)}$.

2)

$$P(Y = 4) = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}, \qquad \boxed{P(Y = 4) = \frac{16}{81} \approx 0{,}20}.$$

3) L'évènement contraire de « au moins un patient a la grippe » est « aucun n'a la grippe », c'est-à-dire $\{Y = 0\}$:

$$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{4}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^4 = 1 - \frac{1}{81}, \qquad \boxed{P(Y \geqslant 1) = \frac{80}{81} \approx 0{,}99}.$$

Interprétation : il est presque certain qu'au moins un des quatre patients a réellement la grippe, alors qu'il n'y a qu'environ une chance sur cinq que les quatre l'aient tous : parmi quatre tests positifs ce matin-là, il y a très probablement au moins un faux positif.