Calculatrice interdite

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de son choix; un résultat non démontré peut être admis pour la suite.

Exercice 1

4 points

1) Dans chacune des situations suivantes, indiquer si la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli, une loi binomiale ou une loi géométrique, et préciser son ou ses paramètres. *Aucune justification n'est demandée.*

a. On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces ; X est le nombre de 6 obtenus.

b. On lance un dé équilibré à six faces jusqu'à obtenir un 6 ; X est le nombre de lancers effectués.

c. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes ; X vaut 1 si la carte est un cœur et 0 sinon.

2) On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(4\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

a. Écrire les cinq premières lignes du triangle de Pascal (de $n = 0$ à $n = 4$) et en déduire le coefficient binomial $\binom{4}{2}$.

b. Calculer $P(X = 2)$ puis $P(X \leqslant 1)$. On donnera les résultats sous forme de fractions.

3) Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \leqslant k) \geqslant 0{,}9$.

Exercice 2

8 points

Deux urnes opaques contiennent des boules indiscernables au toucher : l'urne A, 3 boules rouges et 1 verte ; l'urne B, 1 boule rouge et 3 vertes. On lance une pièce équilibrée : si elle tombe sur pile, on tire une boule au hasard dans l'urne A, sinon dans l'urne B. On note A l'évènement « la boule vient de l'urne A » et R l'évènement « la boule tirée est rouge ».

Pour simuler cette expérience, on a écrit les fonctions Python ci-dessous (`random()`, importée au préalable, renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0\,;1[$).

```
def bernoulli(p):
    if random() < p:
        return 1
    else:
        return 0

def tirage():
    if bernoulli(0.5) == 1:
        urne = "A"
        p = ...
    else:
        urne = "B"
        p = ...
    if bernoulli(p) == 1:
        couleur = "R"
    else:
        couleur = "V"
    return urne, couleur
```

```
def frequence(n):
    rouges = 0
    rougesA = 0
    for i in range(n):
        urne, couleur = tirage()
        if couleur == "R":
            rouges = rouges + 1
            if urne == "A":
                rougesA = rougesA + 1
    return rougesA / rouges

def rang():
    k = 1
    urne, couleur = tirage()
    while couleur == "V":
        k = k + 1
    return k
```

1) Construire un arbre pondéré décrivant cette expérience, puis montrer que $P(R) = \dfrac{1}{2}$.

2) **a.** Que peut renvoyer la fonction `bernoulli(p)` ? Quelle loi suit la variable aléatoire égale à la valeur renvoyée ?

b. Recopier et compléter les deux lignes de la fonction `tirage()` contenant des pointillés.

3) **a.** Que représente, pour l'expérience étudiée, la valeur renvoyée par `frequence(n)` ?

b. L'appel `frequence(10000)` a renvoyé $0{,}751\,2$. De quelle probabilité cette valeur est-elle une estimation ? Calculer la valeur exacte de cette probabilité.

4) La fonction `rang()` doit renvoyer le nombre de tirages (pièce puis boule) nécessaires pour obtenir une première boule rouge.

a. Expliquer pourquoi, telle qu'elle est écrite, la fonction `rang()` peut ne jamais s'arrêter, puis la corriger.

b. On note K la variable aléatoire égale à la valeur renvoyée par la fonction corrigée. Quelle loi suit K ? Préciser son paramètre, puis calculer $P(K = 3)$ et $E(K)$.

Exercice 3

8 points

Un médecin généraliste dispose d'un test rapide de la grippe, réalisé au cabinet en quelques minutes. Les études du fabricant indiquent que :

- si le patient a la grippe, le test est positif avec une probabilité $0{,}9$ (*sensibilité*) ;
- si le patient n'a pas la grippe, le test est négatif avec une probabilité $0{,}95$ (*spécificité*).

Pour un patient qui consulte pour de la fièvre, on note M l'évènement « le patient a la grippe » et T l'évènement « le test est positif ».

Données utiles : $\dfrac{2}{3} \approx 0{,}67$; $\dfrac{18}{19} \approx 0{,}95$; $\dfrac{16}{81} \approx 0{,}20$; $\dfrac{1}{81} \approx 0{,}01$.

Partie A — Hors période épidémique

En dehors des périodes d'épidémie, $10\,\%$ des patients qui consultent pour de la fièvre ont la grippe.

1) Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2) Calculer la probabilité que le patient ait la grippe et que son test soit positif.

3) Montrer que $P(T) = 0{,}135$.

4) Le test d'un patient est positif. Montrer que la probabilité qu'il ait réellement la grippe est égale à $\dfrac{2}{3}$. Interpréter ce résultat pour le médecin.

5) En pleine épidémie, $50\,\%$ des patients qui consultent pour de la fièvre ont la grippe. Calculer, dans ce cas, la probabilité qu'un patient dont le test est positif ait réellement la grippe, et commenter.

Partie B — Quatre patients

Hors période épidémique, quatre patients fiévreux sans lien entre eux ont un test positif le même matin. On note Y le nombre de ces quatre patients qui ont réellement la grippe (on admet le résultat de la question A4).

1) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2) Calculer la probabilité que les quatre patients aient réellement la grippe.

3) Calculer la probabilité qu'au moins l'un des quatre patients ait réellement la grippe. Interpréter ce résultat.