Exercice 1 — Question de cours (10 min)

2,5 points

1) La fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction exponentielle : pour $x > 0$, $\ln x$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut x. Donc $\boxed{\mathrm{e}^{\ln x} = x}$.

2) $g = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \ln'(x)$. Comme $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$:

$$g'(x) = \ln'(x)\,\mathrm{e}^{\ln x} = \boxed{x\,\ln'(x)} \quad (\text{car } \mathrm{e}^{\ln x} = x).$$

3) D'après la question 1, $g(x) = x$ pour tout $x > 0$, donc $g'(x) = 1$. En comparant avec la question 2 : $x\ln'(x) = 1$, et comme $x \neq 0$,

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}.$$

4) Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle, alors $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Pour $x > -\dfrac{1}{3}$, $u(x) = 3x + 1 > 0$ et $u'(x) = 3$, donc $\boxed{(\ln(3x+1))' = \dfrac{3}{3x+1}}$.

Exercice 2 — Lecture graphique (15 min)

4,5 points

1) Le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 a une ordonnée d'environ $1{,}1$: $\boxed{g(1) \approx 1{,}1}$. Or $g(1) = \ln(3\times 1) = \ln 3$, donc $\boxed{\ln 3 \approx 1{,}1}$ (calculatrice : $1{,}0986$).

2) Pour tout $x > 0$, d'après la propriété $\ln(ab) = \ln a + \ln b$: $g(x) = \ln(3x) = \ln 3 + \ln x$, donc

$$\boxed{g(x) - \ln x = \ln 3} \quad (\text{constante, environ } 1{,}1).$$

Chaque point de $\mathscr{C}$ est situé $\ln 3$ unités au-dessus du point de Γ de même abscisse : $\boxed{\mathscr{C} \text{ est l'image de } \Gamma \text{ par la translation verticale de } \ln 3 \approx 1{,}1 \text{ unité}}$.

3) *Graphiquement :* $g(x) \leqslant 1$ pour les abscisses des points de $\mathscr{C}$ situés sur ou sous la droite d, soit environ $0 < x \leqslant 0{,}9$.
Par le calcul : pour $x > 0$, la fonction exponentielle étant strictement croissante,

$$\ln(3x) \leqslant 1 \iff 3x \leqslant \mathrm{e}^1 \iff x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{3}.$$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left]0\,;\,\dfrac{\mathrm{e}}{3}\right]}$ avec $\dfrac{\mathrm{e}}{3} \approx 0{,}91$, en accord avec la lecture.

4) $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse environ $0{,}3$. Par le calcul : $g(x) = 0 \iff \ln(3x) = 0 \iff 3x = 1 \iff x = \dfrac{1}{3}$. Le point cherché a pour abscisse $\boxed{\dfrac{1}{3}}$.

5) Un point commun aurait une abscisse $x > 0$ vérifiant $g(x) = \ln x$, c'est-à-dire $g(x) - \ln x = 0$. Or, d'après la question 2, $g(x) - \ln x = \ln 3 \neq 0$. $\boxed{\text{Les courbes } \Gamma \text{ et } \mathscr{C} \text{ n'ont aucun point commun}}$ (elles sont « parallèles » verticalement).

Exercice 3 — Dose et effet d'un antalgique (35 min)

8 points

Partie A. L'effet brut

1) $E(0) = 20\ln(1+0) = 20\ln 1 = \boxed{0}$: sans antalgique, le score de soulagement est nul.

2) $E = 20\ln u$ avec $u(x) = 1 + 0{,}5x > 0$ sur $[0\,;40]$ et $u'(x) = 0{,}5$. Donc, pour tout $x \in [0\,;40]$,

$$E'(x) = 20 \times \frac{0{,}5}{1+0{,}5x} = \frac{10}{1+0{,}5x} = \frac{10\times 2}{(1+0{,}5x)\times 2} = \boxed{\frac{20}{2+x}}.$$

Pour $x \in [0\,;40]$, $2+x > 0$ donc $E'(x) > 0$: $\boxed{E \text{ est strictement croissante sur } [0\,;40]}$ (de $E(0) = 0$ à $E(40) = 20\ln 21 \approx 60{,}9$).

3) Pour $x \in [0\,;40]$:

$$E(x) = 40 \iff 20\ln(1+0{,}5x) = 40 \iff \ln(1+0{,}5x) = 2$$
$$\iff 1+0{,}5x = \mathrm{e}^2 \iff x = 2\left(\mathrm{e}^2 - 1\right).$$

Or $2\left(\mathrm{e}^2-1\right) \approx 12{,}8 \in [0\,;40]$. $\boxed{x = 2\left(\mathrm{e}^2-1\right) \approx 12{,}8}$: une dose d'environ $12{,}8$ mg procure un score de soulagement de 40.

4) $E(x) \geqslant 30 \iff \ln(1+0{,}5x) \geqslant 1{,}5 \iff 1+0{,}5x \geqslant \mathrm{e}^{1{,}5} \iff x \geqslant 2\left(\mathrm{e}^{1{,}5}-1\right)$, et $2\left(\mathrm{e}^{1{,}5}-1\right) \approx 6{,}96 \approx 7{,}0$.
Le score est au moins égal à 30 pour les doses de l'intervalle $\boxed{\left[2\left(\mathrm{e}^{1{,}5}-1\right)\,;40\right] \approx [7{,}0\,;40]}$ (en mg).

Partie B. Le bénéfice net

1) $B(x) = E(x) - x$, donc $B'(x) = E'(x) - 1 = \dfrac{20}{2+x} - 1 = \dfrac{20-(2+x)}{2+x}$, soit $\boxed{B'(x) = \dfrac{18-x}{2+x}}$.

2) Sur $[0\,;40]$, $2+x > 0$: $B'(x)$ est du signe de $18-x$, positif sur $[0\,;18[$, nul en 18, négatif sur $]18\,;40]$.
$B(0) = 0$; $B(18) = 20\ln 10 - 18 \approx 28{,}1$; $B(40) = 20\ln 21 - 40 \approx 20{,}9$.

x	0		18		40
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
B	0	↗	$\approx 28{,}1$	↘	$\approx 20{,}9$

3) Le bénéfice net est maximal pour $x = 18$: $\boxed{\text{la dose optimale est } 18 \text{ mg}}$, pour un bénéfice net $B(18) = 20\ln 10 - 18 \approx \boxed{28{,}1}$.

4) D'après le tableau de variations :

- sur $[0\,;18]$, B est continue (car dérivable) et strictement croissante de 0 à $28{,}1$; comme $0 < 25 < 28{,}1$, l'équation $B(x) = 25$ admet une unique solution α dans $[0\,;18]$;
- sur $[18\,;40]$, B est continue et strictement décroissante de $28{,}1$ à $20{,}9$; comme $20{,}9 < 25 <$

$28{,}1$, elle admet une unique solution β dans $[18\,;40]$.

L'équation $B(x)=25$ admet exactement deux solutions sur $[0\,;40]$.

À la calculatrice (tableau de valeurs au pas de $0{,}1$) : $B(8{,}8)\approx 24{,}93<25<25{,}01\approx B(8{,}9)$ et $B(31{,}1)\approx 25{,}03>25>24{,}99\approx B(31{,}2)$, donc

$$\boxed{8{,}8<\alpha<8{,}9} \quad \text{et} \quad \boxed{31{,}1<\beta<31{,}2}.$$

Interprétation : le bénéfice net dépasse 25 pour toutes les doses comprises entre $8{,}9$ mg et $31{,}1$ mg environ ; en dessous, l'antalgique agit trop peu ; au-dessus, les effets indésirables l'emportent.

Exercice 4 — Désinfection par UV (20 min)

5 points

1) Chaque passage élimine $85\,\%$ des bactéries : il en reste $100-85=15\,\%$, donc $u_{n+1}=0{,}15\,u_n$ pour tout n. La suite (u_n) est géométrique de raison $0{,}15$ et de premier terme $u_0=2\times10^6$, d'où $\boxed{u_n=2\times10^6\times0{,}15^{\,n}}$.

2) À chaque passage, on multiplie le nombre de bactéries par $0{,}15$ et on compte un passage de plus :

```
def passages():
    n = 0
    b = 2 * 10**6
    while b > 200:
        b = 0.15 * b
        n = n + 1
    return n
```

3) $u_1=300\,000$; $u_2=45\,000$; $u_3=6\,750$; $u_4=1\,012{,}5$; $u_5\approx151{,}9$. La boucle s'arrête dès que $b\leqslant200$, soit après le cinquième passage : `passages()` renvoie 5.

4) $u_n\leqslant200 \iff 2\times10^6\times0{,}15^{\,n}\leqslant200 \iff 0{,}15^{\,n}\leqslant\dfrac{200}{2\times10^6} \iff \boxed{0{,}15^{\,n}\leqslant10^{-4}}$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $\ln(q^n)=n\ln q$:

$$0{,}15^{\,n}\leqslant10^{-4} \iff n\ln0{,}15\leqslant\ln\left(10^{-4}\right) \iff n\geqslant\frac{\ln\left(10^{-4}\right)}{\ln0{,}15},$$

le sens de l'inégalité changeant car on divise par $\ln0{,}15<0$. Or $\dfrac{\ln\left(10^{-4}\right)}{\ln0{,}15}=\dfrac{-4\ln10}{\ln0{,}15}\approx\dfrac{-9{,}21}{-1{,}90}\approx4{,}86$. Le plus petit entier qui convient est $\boxed{n=5}$, ce qui confirme le résultat du programme.

5) Avec le seuil 2, la boucle continue tant que $b>2$: $u_6\approx22{,}8$, $u_7\approx3{,}4$, $u_8\approx0{,}5$, donc le programme renvoie $\boxed{8}$.

Par le calcul : $u_n\leqslant2 \iff 0{,}15^{\,n}\leqslant10^{-6} \iff n\geqslant\dfrac{-6\ln10}{\ln0{,}15}\approx7{,}28$, d'où $n=8$.

Bonus — e^{π} ou π^{e} ?

hors barème

Pour $x > 0$, $k(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ est un quotient : $k'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, du signe de $1 - \ln x$: positif pour $x < \mathrm{e}$, nul en e, négatif pour $x > \mathrm{e}$. La fonction k admet donc en $x = \mathrm{e}$ un **maximum**, $k(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, et comme $\pi \neq \mathrm{e}$: $k(\pi) < k(\mathrm{e})$, c'est-à-dire

$$\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{\mathrm{e}} \iff \mathrm{e} \ln \pi < \pi \iff \ln\left(\pi^{\mathrm{e}}\right) < \ln\left(\mathrm{e}^{\pi}\right) \iff \pi^{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\pi},$$

par croissance stricte de $\ln$ (et $\ln\left(\mathrm{e}^{\pi}\right) = \pi$). Donc $\boxed{\mathrm{e}^{\pi} > \pi^{\mathrm{e}}}$.
Vérification : $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}14$ et $\pi^{\mathrm{e}} \approx 22{,}46$.