Calculatrice autorisée (mode examen)
Durée conseillée indiquée pour chaque exercice.

Exercice 1 — Question de cours (10 min)

2,5 points

On admet que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$; on note $\ln'$ sa fonction dérivée. L'objectif est de retrouver l'expression de $\ln'(x)$.

1) Rappeler pourquoi, pour tout réel $x>0$, $\mathrm{e}^{\ln x}=x$.

2) On pose, pour $x>0$, $g(x)=\mathrm{e}^{\ln x}$. En utilisant la formule de dérivation de $x\longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$, exprimer $g'(x)$ en fonction de $\ln'(x)$ et de x.

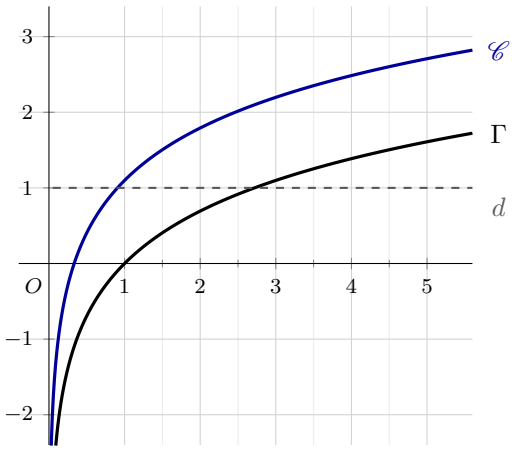
3) En déduire que, pour tout réel $x>0$, $\ln'(x)=\dfrac{1}{x}$.

4) Énoncer la formule donnant la dérivée de $x\longmapsto \ln\left(u(x)\right)$, puis dériver $x\longmapsto \ln(3x+1)$ sur $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Exercice 2 — Lecture graphique (15 min)

4,5 points

Dans le repère orthonormé ci-contre, on a tracé la courbe Γ de la fonction $x\longmapsto \ln x$ et la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(3x)$, ainsi que la droite d d'équation $y=1$ (en pointillés).



1) Lire $g(1)$. Quelle valeur approchée de $\ln 3$ en déduit-on ?

2) Montrer que, pour tout $x>0$, $g(x)-\ln x$ est une constante que l'on précisera. Comment passe-t-on de Γ à $\mathscr{C}$?

3) Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x)\leqslant 1$, puis la résoudre par le calcul (valeur exacte, puis arrondie au centième).

4) Lire l'abscisse du point où $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses, puis retrouver sa valeur exacte par le calcul.

5) Les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont-elles un point commun ? Justifier.

Exercice 3 — Dose et effet d'un antalgique (35 min)

8 points

Pour un antalgique, l'effet d'une dose x, en milligrammes, est mesuré par un **score de soulagement** $E(x)$ (sur une échelle de 0 à 100) modélisé, pour $x\in[0\,;40]$, par

$$E(x)=20\ln(1+0{,}5x).$$

Les effets indésirables augmentent avec la dose ; on mesure le **bénéfice net** par $B(x)=E(x)-x$.

Partie A. L'effet brut

1) Calculer $E(0)$ et interpréter ce résultat.
2) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;40]$, $E'(x) = \dfrac{20}{2+x}$. En déduire le sens de variation de E sur $[0\,;40]$.
3) Résoudre l'équation $E(x) = 40$ (valeur exacte, puis arrondie au dixième). Interpréter.
4) Déterminer l'ensemble des doses pour lesquelles le score de soulagement est au moins égal à 30 (bornes arrondies au dixième).

Partie B. Le bénéfice net

1) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;40]$, $B'(x) = \dfrac{18-x}{2+x}$.
2) Dresser le tableau de variations de B sur $[0\,;40]$ (valeurs arrondies au dixième).
3) Quelle dose donne le meilleur bénéfice net ? Quelle est alors la valeur de ce bénéfice ?
4) Montrer que l'équation $B(x) = 25$ admet exactement deux solutions sur $[0\,;40]$ et en donner un encadrement d'amplitude $0{,}1$ à l'aide de la calculatrice. Interpréter dans le contexte.

Exercice 4 — Désinfection par UV (20 min)

5 points

Dans un laboratoire, une surface porte initialement 2×10^6 bactéries. Chaque passage d'une lampe à ultraviolets élimine $85\,\%$ des bactéries présentes. On note u_n le nombre de bactéries restantes après n passages, avec $u_0 = 2 \times 10^6$. La surface est déclarée désinfectée dès que ce nombre est inférieur ou égal à 200.

1) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 10^6 \times 0{,}15^{\,n}$.
2) La fonction Python ci-contre doit renvoyer le nombre de passages nécessaires pour que la surface soit désinfectée. Recopier et compléter les deux lignes incomplètes.

```
def passages():
    n = 0
    b = 2 * 10**6
    while b > 200:
        b = ...
        n = ...
    return n
```

3) Quelle valeur renvoie `passages()` ? (On pourra calculer les premiers termes de la suite.)
4) Retrouver ce résultat par le calcul : montrer que $u_n \leqslant 200$ équivaut à $0{,}15^{\,n} \leqslant 10^{-4}$, puis résoudre cette inéquation à l'aide de la fonction $\ln$.
5) On remplace 200 par 2 dans le programme. Quelle valeur renvoie-t-il alors ? Justifier par le calcul.

Bonus — e^{π} ou π^{e} ?

hors barème

Lequel des deux nombres e^{π} et π^{e} est le plus grand ? Répondre **sans calculatrice**, en étudiant la fonction k définie sur $]0\,;+\infty[$ par $k(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, puis vérifier à la calculatrice.