Exercice 1 — Six questions, une seule réponse

4,5 points

1) $e^{2x} = 3 \iff 2x = \ln 3 \iff x = \dfrac{\ln 3}{2}$. Réponse a)

(Attention : $\dfrac{\ln 3}{2} \neq \ln \dfrac{3}{2}$, *car* $\ln \dfrac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$.*)*

2) $\ln(3-x)$ existe si et seulement si $3 - x > 0$, c'est-à-dire $x < 3$. Réponse b)

3) L'inéquation n'a de sens que pour $x > 0$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $\ln x \leqslant 2 \iff e^{\ln x} \leqslant e^2 \iff x \leqslant e^2$. Avec $x > 0$: $\mathcal{S} =]0\,;e^2]$. Réponse b)

4) L'équation est définie si $x > 0$ et $x - 1 > 0$, donc pour $x > 1$. Pour $x > 1$:

$$\ln x + \ln(x-1) = \ln 6 \iff \ln(x(x-1)) = \ln 6 \iff x^2 - x = 6 \iff x^2 - x - 6 = 0.$$

$\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $x = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x = \dfrac{1+5}{2} = 3$. Seule 3 vérifie $x > 1$: l'unique solution est 3. Réponse b)

5) $g = \ln u$ avec $u(x) = x^2 + 1 > 0$ et $u'(x) = 2x$, donc $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{x^2+1}$. Réponse b)

6) Pour $x > 0$, $h'(x) = 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{x-2}{x}$, du signe de $x-2$: h est décroissante sur $]0\,;2]$ et croissante sur $[2\,;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 2$, qui vaut $h(2) = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}61$. Réponse a)

Exercice 2 — L'algorithme de Briggs

8 points

1) **a.** Pour $a > 0$, $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$, donc, par la propriété $\ln(xy) = \ln x + \ln y$:

$$\ln a = \ln\left(\sqrt{a} \times \sqrt{a}\right) = \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{a} = 2\ln\sqrt{a}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}.$$

b. $a_1 = \sqrt{a}$, donc $\ln a_1 = \dfrac{1}{2}\ln a$, soit $\ln a = 2\ln a_1$.

De même $\ln a_1 = 2\ln a_2$, donc $\ln a = 2 \times 2\ln a_2 = 2^2 \ln a_2$; puis $\ln a = 2^3 \ln a_3$, etc. À chaque extraction de racine carrée, le logarithme est divisé par 2, donc après n extractions : $\boxed{\ln a = 2^n \ln a_n}$.

2) $a_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $a_2 = \sqrt{a_1} \approx 1{,}1892$, $a_3 = \sqrt{a_2} \approx 1{,}0905$.
Les valeurs **diminuent et se rapprochent de** 1 (la racine carrée d'un nombre supérieur à 1 est plus petite que ce nombre, mais reste supérieure à 1).
Pour n grand, $a_n = 1 + h$ avec $h = a_n - 1$ proche de 0, donc $\ln a_n = \ln(1+h) \approx h = a_n - 1$. En reportant dans $\ln a = 2^n \ln a_n$:

$$\boxed{\ln a \approx 2^n (a_n - 1)}.$$

3) Il faut extraire n racines carrées successives, puis multiplier $a_n - 1$ par 2^n :

```
from math import sqrt

def briggs(a, n):
    for k in range(n):
        a = sqrt(a)
    return 2**n * (a - 1)
```

(Après la boucle, la variable `a` contient a_n ; en Python, 2^n s'écrit `2**n`.)

4) La calculatrice donne $\ln 2 \approx 0{,}693147$. Les valeurs renvoyées s'en rapprochent : l'écart vaut environ $0{,}135$ pour $n = 1$, $0{,}0076$ pour $n = 5$, $0{,}00024$ pour $n = 10$ et il est inférieur à 10^{-6} pour $n = 20$.
Plus n est grand, plus la valeur approchée est précise : l'approximation $\ln(1+h) \approx h$ est d'autant meilleure que a_n est proche de 1.

5) **a.** La boucle `while` est correcte : elle extrait des racines tant que $a - 1 > 10^{-4}$ et compte les extractions dans `n`. L'erreur est dans la dernière ligne : il faut multiplier par 2^n et non par $2n$. On remplace `2 * n * (a - 1)` par `2**n * (a - 1)` :

```
    return 2**n * (a - 1)
```

(Avec la version fautive, pour $a = 2$, le programme renverrait $2 \times 13 \times (a_{13} - 1) \approx 0{,}0022$, très loin de $\ln 2$.)

b. À l'arrêt, $n = 13$ et $a_{13} - 1 \leqslant 10^{-4}$: a_{13} est très proche de 1, donc $\ln a_{13} \approx a_{13} - 1$ avec une excellente précision, et $\ln 2 = 2^{13} \ln a_{13} \approx 2^{13}\,(a_{13} - 1)$.
Contrôle : $2^{13} = 8192$ et le programme corrigé renvoie environ $0{,}69318$, alors que $\ln 2 \approx 0{,}69315$: les deux valeurs coïncident à 3×10^{-5} près.

Exercice 3 — La propriété fondamentale et la table de Briggs

7,5 points

Partie A. La propriété fondamentale

1) Par définition, $\ln a$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut a (la fonction $\ln$ est la réciproque de la fonction exponentielle) : $\boxed{\mathrm{e}^{\ln a} = a}$. De même $\mathrm{e}^{\ln b} = b$.
Par la propriété $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$ de l'exponentielle :

$$\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = \mathrm{e}^{\ln a} \times \mathrm{e}^{\ln b} = a \times b, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = ab}.$$

2) Le nombre $\ln a + \ln b$ a pour exponentielle ab ; or l'unique réel dont l'exponentielle vaut ab est $\ln(ab)$. Donc

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}.$$

(Autrement dit : on applique $\ln$ aux deux membres de $\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = ab$ et on utilise $\ln\left(\mathrm{e}^X\right) = X$.)

3) On applique la propriété précédente à a et $\dfrac{1}{a}$ (tous deux strictement positifs) :

$$\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0, \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\ln \frac{1}{a} = -\ln a}.$$

Partie B. Calculer avec une table

1) On décompose $35 = 5 \times 7$ et $48 = 2^4 \times 3$; avec la propriété fondamentale (et $\ln\left(2^4\right) = 4\ln 2$) :

$$\ln(35 \times 48) = \ln 5 + \ln 7 + 4\ln 2 + \ln 3 \approx 1{,}6094 + 1{,}9459 + 2{,}7724 + 1{,}0986 = \boxed{7{,}4263}.$$

À la calculatrice, $\mathrm{e}^{7{,}4263} \approx 1679{,}6$: on retrouve $35 \times 48 = 1680$ à l'arrondi de la table près. La multiplication a été remplacée par trois additions (et des lectures de table).

Partie C. L'approximation de Briggs

1) $f = x - \ln u$ avec $u(x) = 1 + x > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$ et $u'(x) = 1$. Pour tout $x > -1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \boxed{\frac{x}{1+x}}.$$

2) Sur $]-1\,;+\infty[$, $1+x > 0$: $f'(x)$ est du signe de x, négatif sur $]-1\,;0[$, nul en 0, positif sur $]0\,;+\infty[$. De plus $f(0) = 0 - \ln 1 = \boxed{0}$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	0	↗	

3) D'après le tableau, f admet en 0 son minimum, qui vaut 0 : pour tout $x > -1$, $f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geqslant 0$, soit

$$\boxed{\ln(1+x) \leqslant x \quad \text{pour tout } x > -1}.$$