*Calculatrice autorisée (mode examen)*

## Exercice 1 — Six questions, une seule réponse

**4,5 points**

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie, **en justifiant brièvement**. Une réponse fausse ou absente ne retire aucun point.

**1)** L'équation $\mathrm{e}^{2x} = 3$ a pour solution :

a) $x = \dfrac{\ln 3}{2}$ b) $x = \ln \dfrac{3}{2}$ c) $x = (\ln 3)^2$ d) $x = 2\ln 3$

**2)** La fonction $x \longmapsto \ln(3 - x)$ est définie sur :

a) $]3\,;+\infty[$ b) $]-\infty\,;3[$ c) $]0\,;+\infty[$ d) $]-\infty\,;3]$

**3)** L'inéquation $\ln x \leqslant 2$ a pour ensemble de solutions :

a) $]-\infty\,;\mathrm{e}^2]$ b) $]0\,;\mathrm{e}^2]$ c) $[\mathrm{e}^2\,;+\infty[$ d) $]0\,;2]$

**4)** L'équation $\ln x + \ln(x-1) = \ln 6$ :

a) a deux solutions, $3$ et $-2$ b) a pour unique solution $3$
c) n'a aucune solution d) a pour unique solution $6$

**5)** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. Pour tout réel $x$ :

a) $g'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
c) $g'(x) = 2x\ln\left(x^2+1\right)$ d) $g'(x) = \dfrac{1}{2x}$

**6)** Soit $h$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x - 2\ln x$. La fonction $h$ :

a) admet pour minimum $h(2) = 2 - 2\ln 2$ b) admet pour minimum $h(1) = 1$
c) admet pour minimum $h(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 2$ d) n'admet pas de minimum

## Exercice 2 — L'algorithme de Briggs

**8 points**

Au début du XVII$^{\text{e}}$ siècle, Henry Briggs calcule des tables de logarithmes en extrayant des **racines carrées successives**. On part d'un réel $a > 0$ et on pose $a_0 = a$, puis $a_1 = \sqrt{a_0}$, $a_2 = \sqrt{a_1}$, et ainsi de suite : $a_{k+1} = \sqrt{a_k}$ pour tout entier naturel $k$.

**1)** **a.** Justifier que, pour tout réel $a > 0$, $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a$.

**b.** En déduire que $\ln a_1 = \dfrac{1}{2}\ln a$, puis que, pour tout entier naturel $n$, $\ln a = 2^n \ln a_n$.

**2)** On prend $a = 2$. Calculer $a_1$, $a_2$ et $a_3$ (arrondis à $10^{-4}$). Que constate-t-on ?
On admet que, pour $n$ grand, $a_n$ est proche de $1$ et que, pour $h$ proche de $0$, $\ln(1+h) \approx h$. En déduire que, pour $n$ grand, $\ln a \approx 2^n\,(a_n - 1)$.

**3)** La fonction Python ci-contre doit renvoyer la valeur approchée $2^n\,(a_n - 1)$ de $\ln a$. Recopier et compléter les trois lignes incomplètes.

```
from math import sqrt
def briggs(a, n):
    for k in range(...):
        a = ...
    return ... * (a - 1)
```

**4)** On a exécuté la fonction pour $a = 2$ et plusieurs valeurs de $n$ :

| $n$ | 1 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| `briggs(2, n)` | 0,828427 | 0,700709 | 0,693382 | 0,693147 |

Comparer ces valeurs à la valeur de $\ln 2$ donnée par la calculatrice. Que peut-on dire de la précision de la méthode lorsque $n$ augmente ?

**5)** Un élève écrit la version ci-contre, qui doit extraire des racines carrées **jusqu'à ce que** $a - 1 \leqslant 10^{-4}$, puis renvoyer la valeur approchée de $\ln a$.

```
from math import sqrt
def briggs2(a):
    n = 0
    while a - 1 > 0.0001:
        a = sqrt(a)
        n = n + 1
    return 2 * n * (a - 1)
```

**a.** Ce programme contient une erreur : la repérer et la corriger.

**b.** Une fois corrigé, le programme s'arrête après 13 extractions pour $a = 2$. Justifier que $2^{13}\,(a_{13} - 1)$ est alors proche de $\ln 2$.

## Exercice 3 — La propriété fondamentale et la table de Briggs

**7,5 points**

Depuis Henry Briggs (1624), les tables de logarithmes donnent, pour chaque entier, une valeur approchée de son logarithme. Elles reposent sur la **propriété fondamentale** : le logarithme d'un **produit** est la **somme** des logarithmes des facteurs. On la démontre (partie A), on l'utilise avec une table (partie B), puis on justifie l'approximation $\ln(1+h) \approx h$ utilisée à l'exercice 2 (partie C). Dans tout l'exercice, $a$ et $b$ désignent deux réels strictement positifs.

**Partie A. La propriété fondamentale**

**1)** Rappeler pourquoi $\mathrm{e}^{\ln a} = a$. En déduire que $\mathrm{e}^{\ln a + \ln b} = ab$.

**2)** En déduire que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

**3)** En utilisant l'égalité $a \times \dfrac{1}{a} = 1$, démontrer que $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$.

**Partie B. Calculer avec une table**

Extrait d'une table de logarithmes : $\ln 2 \approx 0{,}6931$ ; $\ln 3 \approx 1{,}0986$ ; $\ln 5 \approx 1{,}6094$ ; $\ln 7 \approx 1{,}9459$.

**1)** On veut calculer $35 \times 48$ sans poser la multiplication. En n'utilisant que la table et des additions, déterminer une valeur approchée de $\ln(35 \times 48)$, puis retrouver le produit à la calculatrice. Commenter.

**Partie C. L'approximation de Briggs**

On considère la fonction $f$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

**1)** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{x}{1+x}$.

**2)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de $f$ (les limites ne sont pas demandées). Préciser la valeur de $f(0)$.

**3)** En déduire que, pour tout réel $x > -1$, $\quad \ln(1+x) \leqslant x$.