Exercice 1

6 points

1) **a.** $\boxed{\ln 1 = 0}$: la courbe Γ passe par le point $A(1\,;0)$.
Quand x se rapproche de 0 (par valeurs positives), la courbe Γ « plonge » vers le bas sans jamais remonter ; quand x devient grand, elle monte de plus en plus lentement mais sans se stabiliser. On conjecture :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty}.$$

b. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, la courbe Γ admet une asymptote verticale :
$\boxed{\text{l'axe des ordonnées, droite d'équation } x = 0}$.
Comme $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, Γ n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

2) **a.** La fonction $\ln$ est la **fonction réciproque** de la fonction exponentielle : pour tout réel x et tout réel $y > 0$,

$$y = \mathrm{e}^x \iff x = \ln y.$$

Ainsi, un point $M(x\,;y)$ appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si le point $M'(y\,;x)$ appartient à Γ. Or M' est le symétrique de M par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$ (on échange les deux coordonnées). Donc $\boxed{\Gamma \text{ et } \mathscr{C} \text{ sont symétriques par rapport à } \Delta}$.

b. B est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1 : $B(1\,;\mathrm{e}^1)$, soit $\boxed{B(1\,;\mathrm{e})}$. Son symétrique par rapport à Δ est $\boxed{B'(\mathrm{e}\,;1)}$, qui appartient à Γ : donc $\boxed{\ln \mathrm{e} = 1}$.
Sur le graphique, B' est le point de Γ d'ordonnée 1 ; son abscisse se lit entre $2{,}5$ et 3 : $\boxed{\mathrm{e} \approx 2{,}7}$.

3) **a.** Les solutions de $\ln x = -1$ sont les abscisses des points de Γ d'ordonnée -1. On lit une seule solution, $x \approx 0{,}4$.
Par le calcul : pour $x > 0$, $\ln x = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1}$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\mathrm{e}^{-1}\right\}}$ (et $\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}37$, cohérent avec la lecture).

b. Les solutions de $\mathrm{e}^x = 3$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}$ d'ordonnée 3. On lit $x \approx 1{,}1$.
Par le calcul : $\mathrm{e}^x = 3 \iff x = \ln 3$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{\ln 3\}}$ (et $\ln 3 \approx 1{,}1$).

4) **a.** On note $f(x) = \ln x$ pour $x > 0$; alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$. La tangente T en A a pour équation

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 \times (x-1) + 0, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{T : y = x - 1}.$$

Contrôle : la droite T passe bien par $A(1\,;0)$ et par le point $(3\,;2)$, comme sur la figure.

b. Sur le graphique, la courbe Γ est **entièrement située en dessous** de sa tangente T (elle ne la touche qu'au point A). On en déduit que, pour tout réel $x > 0$:

$$\boxed{\ln x \leqslant x - 1}.$$

Exercice 2

4 points

Transformations d'écriture utilisées : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln\dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln\dfrac{1}{a} = -\ln a$, $\ln(a^n) = n\ln a$, $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$, $\ln \mathrm{e} = 1$.

- $\ln 6 = \ln(2\times 3) = \ln 2 + \ln 3 \approx 0{,}69 + 1{,}10 = 1{,}79$.
- $\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2 \approx 3\times 0{,}69 = 2{,}07$.
- $\ln\dfrac{1}{3} = -\ln 3 \approx -1{,}10$.
- $\ln 1{,}5 = \ln\dfrac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2 \approx 1{,}10 - 0{,}69 = 0{,}41$.
- $\ln\sqrt{3} = \dfrac{1}{2}\ln 3 \approx \dfrac{1{,}10}{2} = 0{,}55$.
- $\ln\dfrac{2}{9} = \ln 2 - \ln 9 = \ln 2 - \ln\left(3^2\right) = \ln 2 - 2\ln 3 \approx 0{,}69 - 2{,}20 = -1{,}51$.
- $\ln\dfrac{\mathrm{e}^2}{3} = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) - \ln 3 = 2 - \ln 3 \approx 2 - 1{,}10 = 0{,}90$.
- $\ln(12\mathrm{e}) = \ln 12 + \ln \mathrm{e} = \ln\left(2^2\times 3\right) + 1 = 2\ln 2 + \ln 3 + 1 \approx 1{,}38 + 1{,}10 + 1 = 3{,}48$.

x	6	8	$\frac{1}{3}$	1,5	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{\mathrm{e}^2}{3}$	12e
$\ln x$	$\ln 2 + \ln 3$	$3\ln 2$	$-\ln 3$	$\ln 3 - \ln 2$	$\frac{1}{2}\ln 3$	$\ln 2 - 2\ln 3$	$2 - \ln 3$	$2\ln 2 + \ln 3 + 1$
valeur approchée	1,79	2,07	−1,10	0,41	0,55	−1,51	0,90	3,48

Exercice 3

5,5 points

Partie A. Modèle discret

1) Toutes les 5 heures, la quantité est divisée par 2 : $u_1 = \dfrac{200}{2} = 100$ et $u_2 = \dfrac{100}{2} = 50$ (en mg).

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$: la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $u_0 = 200$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = 200\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

2) **a.** $u_n \leqslant 10 \iff 200\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant 10 \iff \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{10}{200}$ (on divise par $200 > 0$), soit

$$\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{20}}.$$

b. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$, donc l'inéquation équivaut à

$\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leqslant \ln\frac{1}{20}$, c'est-à-dire, avec $\ln(q^n) = n\ln q$:

$$n\ln\frac{1}{2} \leqslant \ln\frac{1}{20} \iff -n\ln 2 \leqslant -\ln 20 \iff n\ln 2 \geqslant \ln 20 \iff n \geqslant \frac{\ln 20}{\ln 2} \quad (\text{car } \ln 2 > 0).$$

Comme $2^4 = 16 < 20 < 32 = 2^5$ et que la fonction $\ln$ est strictement croissante : $\ln\left(2^4\right) < \ln 20 < \ln\left(2^5\right)$, c'est-à-dire $4\ln 2 < \ln 20 < 5\ln 2$. En divisant par $\ln 2 > 0$:

$$\boxed{4 < \frac{\ln 20}{\ln 2} < 5}.$$

Contrôle avec les données : $\ln 20 = \ln 2 + \ln 10 \approx 2{,}99$, et l'on a bien $4\ln 2 \approx 2{,}76 < 2{,}99 < 3{,}45 \approx 5\ln 2$.

Le plus petit entier n supérieur ou égal à $\frac{\ln 20}{\ln 2}$ (compris entre 4 et 5) est donc 5 : $\boxed{n \geqslant 5}$ ($u_4 = 12{,}5$ mg et $u_5 = 6{,}25$ mg).

c. $n = 5$ correspond à $5 \times 5 = 25$ heures après 8 h, soit $\boxed{9\text{ h le lendemain matin}}$: selon ce modèle, la caféine du double expresso n'a plus d'effet sensible qu'un peu plus de 24 heures après son absorption.

Partie B. Modèle continu

1) Au bout de 5 heures, la quantité initiale de 200 mg a été divisée par 2 : $\boxed{Q(5) = 100}$.
Or $Q(5) = 200\,\mathrm{e}^{-5k}$, donc :

$$200\,\mathrm{e}^{-5k} = 100 \iff \mathrm{e}^{-5k} = \frac{1}{2} \iff -5k = \ln\frac{1}{2}$$
$$\iff -5k = -\ln 2 \iff \boxed{k = \frac{\ln 2}{5}} \quad (k \approx 0{,}14).$$

2) Pour $t \in [0\,;24]$:

$$Q(t) \leqslant 25 \iff 200\,\mathrm{e}^{-kt} \leqslant 25 \iff \mathrm{e}^{-kt} \leqslant \frac{1}{8}$$
$$\iff -kt \leqslant \ln\frac{1}{8} \iff -kt \leqslant -3\ln 2 \iff kt \geqslant 3\ln 2,$$

en utilisant la croissance de $\ln$ et $\ln\frac{1}{8} = -\ln 8 = -\ln\left(2^3\right) = -3\ln 2$. Avec $k = \frac{\ln 2}{5}$:

$$kt \geqslant 3\ln 2 \iff \frac{\ln 2}{5}t \geqslant 3\ln 2 \iff t \geqslant 15 \quad (\text{on divise par } \tfrac{\ln 2}{5} > 0).$$

Donc $\boxed{Q(t) \leqslant 25 \iff t \geqslant 15}$.

3) La quantité de caféine redescend à 25 mg au bout de 15 heures, soit à $8 + 15 = 23$ h : $\boxed{\text{la personne peut s'endormir sans gêne à partir de } 23\text{ h}}$.

Dans le modèle discret, $u_3 = 200 \times \frac{1}{8} = 25$ mg exactement $3 \times 5 = 15$ heures après 8 h, soit aussi à 23 h : $\boxed{\text{les deux modèles sont cohérents}}$ (le modèle continu décrit en plus ce qui se passe entre deux demi-vies).

Exercice 4

4,5 points

1) **a.** Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x = 7 \iff x = \ln 7$. $\boxed{\mathcal{S} = \{\ln 7\}}$

b. $\mathrm{e}^{2x-1} = 5 \iff 2x - 1 = \ln 5 \iff x = \dfrac{1 + \ln 5}{2}$. $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\dfrac{1 + \ln 5}{2}\right\}}$

c. L'équation est définie pour $x > 0$. $\ln x = -2 \iff x = \mathrm{e}^{-2}$, et $\mathrm{e}^{-2} > 0$ convient. $\boxed{\mathcal{S} = \{\mathrm{e}^{-2}\}}$

d. L'équation est définie pour $x > 0$. $2\ln x = \ln 9 \iff \ln\left(x^2\right) = \ln 9 \iff x^2 = 9 \iff x = 3$ ou $x = -3$. Seule la valeur $x = 3$ est strictement positive. $\boxed{\mathcal{S} = \{3\}}$
(On peut aussi écrire $\ln 9 = \ln\left(3^2\right) = 2\ln 3$*, d'où* $\ln x = \ln 3$ *et* $x = 3$*.)*

2) $A = \ln\left(\mathrm{e}^5\right) - 2\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 5 - 2 \times \dfrac{1}{2} = 5 - 1$, donc $\boxed{A = 4}$ (car $\ln\left(\mathrm{e}^a\right) = a$ et $\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{1/2}$).
$B = \mathrm{e}^{\ln 3 + \ln 4} = \mathrm{e}^{\ln 3} \times \mathrm{e}^{\ln 4} = 3 \times 4$, donc $\boxed{B = 12}$ (ou $\ln 3 + \ln 4 = \ln 12$ et $\mathrm{e}^{\ln 12} = 12$).

3) **a.** $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (-2\ln x) = +\infty$ et, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} (3 - 2\ln x) = +\infty}$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2\ln x) = -\infty$ et, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - 2\ln x) = -\infty}$.

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty$. Par somme de deux limites égales à $-\infty$: $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty}$.