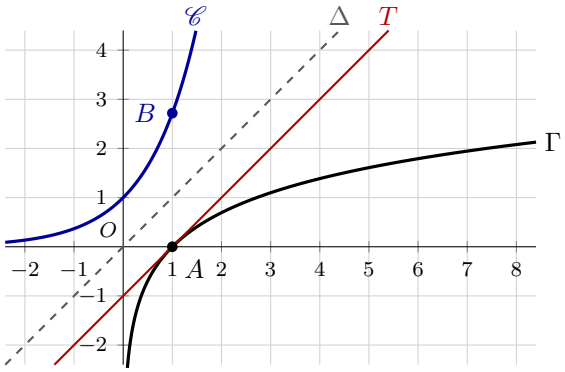
Calculatrice interdite

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1

6 points

Dans le repère orthonormé ci-dessous, on a tracé la courbe Γ de la fonction logarithme népérien $x \longmapsto \ln x$, la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$, la droite Δ d'équation $y = x$ (en pointillés) et la droite T, tangente à Γ au point A d'abscisse 1. Le point B est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.



1) **a.** Donner la valeur de $\ln 1$. Conjecturer, par lecture graphique, $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x$.

b. Que peut-on en déduire pour la courbe Γ ?

2) **a.** Expliquer pourquoi les courbes Γ et $\mathscr{C}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ.

b. Donner les coordonnées exactes de B, puis celles du symétrique B' de B par rapport à Δ. En déduire la valeur de $\ln \mathrm{e}$, et lire sur le graphique une valeur approchée de e.

3) **a.** Résoudre graphiquement l'équation $\ln x = -1$ (valeur approchée au dixième), puis donner la valeur exacte de la solution.

b. Résoudre graphiquement l'équation $\mathrm{e}^x = 3$ (valeur approchée au dixième), puis donner la valeur exacte de la solution.

4) **a.** Déterminer par le calcul une équation de la tangente T.

b. Conjecturer graphiquement la position de Γ par rapport à T. En déduire une inégalité vérifiée par $\ln x$ pour tout réel $x > 0$.

Exercice 2

4 points

On donne $\ln 2 \approx 0{,}69$ et $\ln 3 \approx 1{,}10$. Recopier et compléter le tableau : deuxième ligne, $\ln x$ en fonction de $\ln 2$ et de $\ln 3$ (et éventuellement d'entiers) ; troisième ligne, valeur approchée de $\ln x$ au centième. *Les transformations d'écriture devront apparaître sur la copie.*

x	6	8	$\frac{1}{3}$	$1{,}5$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{\mathrm{e}^2}{3}$	$12\mathrm{e}$
$\ln x$	$\ln 2 + \ln 3$							
valeur approchée	$1{,}79$							

Exercice 3

5,5 points

Après l'absorption d'un café, la caféine passe dans le sang puis est progressivement éliminée par le foie. Chez un adulte en bonne santé, la quantité de caféine présente dans l'organisme est **divisée par deux toutes les 5 heures** environ.

À 8 h, une personne boit un double expresso contenant 200 mg de caféine. On suppose, pour simplifier, que toute la caféine passe immédiatement dans l'organisme.

Données utiles : $\ln 2 \approx 0{,}69$ $\ln 10 \approx 2{,}30$

Partie A. Modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la quantité de caféine, en mg, présente dans l'organisme $5n$ heures après 8 h. Ainsi $u_0 = 200$.

1) Calculer u_1 et u_2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Exprimer u_n en fonction de n.

2) On admet qu'en dessous de 10 mg, la caféine n'a plus d'effet sensible.

a. Montrer que $u_n \leqslant 10$ équivaut à $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{20}$.

b. Montrer, à l'aide de la fonction $\ln$, que cette inéquation équivaut à $n \geqslant \dfrac{\ln 20}{\ln 2}$. Justifier que $4 < \dfrac{\ln 20}{\ln 2} < 5$ à l'aide de $2^4 = 16$ et $2^5 = 32$, puis conclure.

c. À quelle heure, selon ce modèle, la caféine n'a-t-elle plus d'effet sensible ?

Partie B. Modèle continu

On modélise maintenant la quantité de caféine, en mg, présente dans l'organisme t heures après 8 h par $Q(t) = 200\,\mathrm{e}^{-kt}$, où k est un réel strictement positif et $t \in [0\,;24]$.

1) Justifier que $Q(5) = 100$, puis en déduire que $k = \dfrac{\ln 2}{5}$.

2) Montrer que $Q(t) \leqslant 25$ équivaut à $t \geqslant 15$.

3) Cette personne s'endort difficilement tant que la quantité de caféine dans son organisme dépasse 25 mg. À partir de quelle heure peut-elle s'endormir sans gêne ? Ce résultat est-il cohérent avec le modèle discret de la partie A ?

Exercice 4

4,5 points

Les questions sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes (on précisera, si besoin, l'ensemble sur lequel on la résout) :

a. $\mathrm{e}^x = 7$ **b.** $\mathrm{e}^{2x-1} = 5$ **c.** $\ln x = -2$ **d.** $2\ln x = \ln 9$

2) Écrire le plus simplement possible les nombres $A = \ln\left(\mathrm{e}^5\right) - 2\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$ et $B = \mathrm{e}^{\ln 3 + \ln 4}$.

3) Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\to 0^+} (3 - 2\ln x)$ **b.** $\lim\limits_{x\to +\infty} (3 - 2\ln x)$ **c.** $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)$