Exercice 1

2,5 points

1) $q\,S_n = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$. En soustrayant, tous les termes de q à q^n s'éliminent :

$$S_n - q\,S_n = (1 + q + \cdots + q^n) - \left(q + \cdots + q^n + q^{n+1}\right) = 1 - q^{n+1}.$$

Or $S_n - q\,S_n = (1-q)\,S_n$ et $1 - q \neq 0$ (car $q \neq 1$), donc

$$\boxed{S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

2) Comme $0 < q < 1$: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0}$.

3) $q^{n+1} = q \times q^n$ tend vers $q \times 0 = 0$, donc $1 - q^{n+1}$ tend vers 1 et, en divisant par le nombre fixe $1 - q$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q}}.$$

4) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} = S_n$ avec $q = \frac{1}{3}$ (et $0 < \frac{1}{3} < 1$). Sa limite est $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{3}{2}}$.

Exercice 2

4 points

1) À chaque étape, l'aire ajoutée est le quart de la précédente : pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = \frac{1}{4}\,A_n$. La suite (A_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } \frac{1}{4}}$ et de premier terme $A_0 = 1$, donc $A_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $A_3 = \frac{1}{4^3} = \boxed{\frac{1}{64}}$.

2) S_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$ et de premier terme 1. D'après la formule de l'exercice 1 :

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)}.$$

Vérification : $S_1 = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{15}{16} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$.

3) $0 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{4}{3}}$.
En ajoutant des triangles de plus en plus petits, on remplit tout le segment de parabole : Archimède en déduit que $\boxed{\text{l'aire du segment de parabole vaut } \frac{4}{3} \text{ de l'aire du triangle } ABC}$.

4) L'écart vaut $\frac{4}{3} - S_n = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$, et il décroît avec n. À la calculatrice :

$$\frac{4}{3} - S_4 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4^5} \approx 0{,}001\,30 > 10^{-3} \qquad \text{et} \qquad \frac{4}{3} - S_5 = \frac{4}{3} \times \frac{1}{4^6} \approx 0{,}000\,33 < 10^{-3}.$$

Le plus petit entier cherché est $\boxed{n = 5}$: dès la cinquième étape, l'aire obtenue est à moins d'un millième de l'aire du segment.

Exercice 3

9 points

Partie A — Le point M

1) Au départ, M est à 100 de A ; en une seconde il parcourt le dixième de cette distance : $x_1 = 0 + \dfrac{100}{10} = 10$.
Il reste alors $100 - 10 = 90$ à parcourir ; la seconde suivante, M avance de 9 : $x_2 = 10 + 9 = 19$.
$\boxed{x_1 = 10}$ $\boxed{x_2 = 19}$

2) Au bout de n secondes, la distance qui sépare M de A est $100 - x_n$. Pendant la seconde suivante, M en parcourt le dixième :

$$x_{n+1} = x_n + 0{,}1\,(100 - x_n) = x_n + 10 - 0{,}1\,x_n, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{x_{n+1} = 0{,}9\,x_n + 10}.$$

3) $\ell = 0{,}9\,\ell + 10 \iff 0{,}1\,\ell = 10 \iff \ell = 100.$ $\boxed{\ell = 100}$
(Si M était en A, il n'aurait plus rien à parcourir et resterait en A.)

4) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = x_{n+1} - 100 = 0{,}9\,x_n + 10 - 100 = 0{,}9\,x_n - 90 = 0{,}9\,(x_n - 100) = 0{,}9\,v_n.$$

La suite (v_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } 0{,}9}$, de premier terme $v_0 = x_0 - 100 = \boxed{-100}$.
Donc $v_n = -100 \times 0{,}9^n$ et, comme $x_n = v_n + 100$: $\boxed{x_n = 100 - 100 \times 0{,}9^n}$.
Vérification : $x_1 = 100 - 90 = 10$ et $x_2 = 100 - 81 = 19$.

5) Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(100 - 100 \times 0{,}9^{n+1}\right) - \left(100 - 100 \times 0{,}9^n\right) \\ &= 100 \times 0{,}9^n - 100 \times 0{,}9 \times 0{,}9^n = 100 \times 0{,}9^n \times (1 - 0{,}9) = 10 \times 0{,}9^n > 0. \end{aligned}$$

Donc la suite (x_n) est $\boxed{\text{croissante}}$: le point M avance toujours (de moins en moins vite).

6) $0 < 0{,}9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}9^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} 100 \times 0{,}9^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 100}$.
Interprétation : la distance OM se rapproche autant qu'on veut de $100 = OA$, mais $x_n = 100 - 100 \times 0{,}9^n < 100$ pour tout n : le point M $\boxed{\text{s'approche indéfiniment de } A \text{ sans jamais l'atteindre}}$.

Partie B — Le point N et le logarithme de Neper

1) N parcourt 10 unités par seconde : $\boxed{y_n = 10\,n}$, suite $\boxed{\text{arithmétique de raison } 10}$ (et de premier terme 0).
$r_n = 100 - x_n = 100 - (100 - 100 \times 0{,}9^n)$, soit $\boxed{r_n = 100 \times 0{,}9^n}$:
suite $\boxed{\text{géométrique de raison } 0{,}9}$, de premier terme 100.

2) $r_2 = 81$, $r_3 = 72{,}9$, $r_4 = 65{,}61$, $r_5 = 59{,}049 \approx 59{,}05$; $y_n = 10n$.

n	0	1	2	3	4	5
r_n	100	90	81	72,9	65,61	59,05
y_n	0	10	20	30	40	50

3) Pour tous entiers naturels m et p :

$$r_m \times r_p = 100 \times 0{,}9^m \times 100 \times 0{,}9^p = 100 \times \left(100 \times 0{,}9^{m+p}\right) = 100 \times r_{m+p}.$$

Donc $\boxed{r_m \times r_p = 100 \times r_{m+p}}$. Avec $m = 2$ et $p = 3$: $r_2 \times r_3 = 81 \times 72{,}9 = 5\,904{,}9$ et $100 \times r_5 = 100 \times 59{,}049 = 5\,904{,}9$: l'égalité est vérifiée.
Pendant ce temps, $y_2 + y_3 = 20 + 30 = 50 = y_5$: au produit $r_2 \times r_3$ (divisé par 100) correspond la somme $y_2 + y_3$ des logarithmes. $\boxed{\text{Produit des } r \longleftrightarrow \text{somme des } y}$

4) Pour multiplier deux grands nombres r_m et r_p, il suffit de lire dans la table leurs logarithmes y_m et y_p, de les **additionner**, puis de lire dans la table le nombre r_{m+p} qui correspond à la somme (et de replacer le facteur 100) : $\boxed{\text{la table remplace une multiplication par une addition}}$, bien plus rapide et moins sujette aux erreurs.

Exercice 4

4,5 points

1) $0 < 0{,}4 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 \times 0{,}4^n = 0$; de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$. Par somme de limites : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5}$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(7 - \dfrac{3}{n}\right) = 7 - 0 = 7$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(7 + 2 \times 0{,}5^n\right) = 7 + 0 = 7$ (car $0 < 0{,}5 < 1$).
La suite (v_n) est encadrée par deux suites qui ont la même limite 7 : d'après le **théorème des gendarmes**, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 7}$.

3) $1{,}5 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}5^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times 1{,}5^n = +\infty$.
Comme $w_n \geqslant 2 \times 1{,}5^n$ pour tout n, la suite (w_n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$: par comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty}$.

4) $0 < \dfrac{2}{3} < 1$: la suite (t_n) est décroissante et tend vers 0. À la calculatrice : $t_{15} = 6 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{15} \approx 0{,}013\,7 > 0{,}01$ et $t_{16} = 6 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{16} \approx 0{,}009\,1 < 0{,}01$.
Le plus petit entier cherché est $\boxed{n = 16}$.

Bonus

hors barème

$d_n = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \cdots = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + \cdots + \dfrac{9}{10^n} = \dfrac{9}{10}\left(1 + \dfrac{1}{10} + \cdots + \dfrac{1}{10^{n-1}}\right)$: somme de n termes d'une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{10}$. D'après l'exercice 1 :

$$d_n = \frac{9}{10} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \times \frac{10}{9}\left(1 - 0{,}1^n\right) = 1 - 0{,}1^n.$$

Vérification : $d_2 = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$.
Comme $0 < 0{,}1 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}1^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = 1}$.

Conclusion : le nombre « $0{,}999\ldots$ » est la limite des d_n, c'est-à-dire $\boxed{0{,}999\ldots = 1}$: ce n'est pas un nombre « juste en dessous de 1 », c'est une autre écriture du nombre 1.