Calculatrice autorisée (mode examen)
Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf mention contraire.

Exercice 1

2,5 points

Question de cours. Soit q un réel tel que $0 < q < 1$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

1) Calculer $S_n - q\,S_n$ et en déduire que $S_n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

2) Rappeler la limite de q^n lorsque n tend vers $+\infty$.

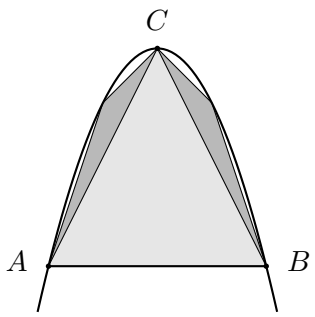
3) En déduire la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4) Application : déterminer la limite de $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{3^n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

4 points

Au III[e] siècle avant notre ère, Archimède calcule l'aire d'un *segment de parabole* (la région comprise entre un arc de parabole et sa corde $[AB]$) en le remplissant de triangles.
Il commence par le triangle ABC, dont l'aire est prise comme unité : $A_0 = 1$. Il ajoute ensuite deux triangles (en gris foncé sur la figure) dont l'aire totale est $A_1 = \dfrac{1}{4}$, puis quatre triangles d'aire totale $A_2 = \dfrac{1}{16}$, et ainsi de suite : à chaque étape, l'aire ajoutée est le quart de la précédente.
On note $S_n = A_0 + A_1 + \cdots + A_n$ l'aire totale obtenue après n étapes.



1) Justifier que la suite (A_n) est géométrique et calculer A_3.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = \dfrac{4}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

3) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quel résultat Archimède en déduit-il sur l'aire du segment de parabole ?

4) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que l'écart entre S_n et cette limite soit strictement inférieur à 10^{-3}.

Exercice 3

9 points

En 1614, l'Écossais John Neper définit ses logarithmes à l'aide de deux points en mouvement. On en étudie ici une version simplifiée.
Un point M part de l'origine O d'un segment $[OA]$ de longueur 100. **Chaque seconde, M parcourt le dixième de la distance qui le sépare encore de A.** On note x_n la distance OM, en unités de longueur, au bout de n secondes ; ainsi $x_0 = 0$.

Partie A — Le point M

1) Calculer x_1 et x_2.
2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = 0{,}9\,x_n + 10$.
3) Déterminer le réel ℓ tel que la suite constante égale à ℓ vérifie cette relation.
4) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = x_n - 100$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme, puis en déduire que $x_n = 100 - 100 \times 0{,}9^n$.
5) Montrer que la suite (x_n) est croissante.
6) Déterminer la limite de la suite (x_n) et l'interpréter : le point M atteint-il le point A ?

Partie B — Le point N et le logarithme de Neper

Un second point N part de O au même instant et avance sur une droite **à vitesse constante : 10 unités par seconde**. On note y_n la distance parcourue par N au bout de n secondes, et $r_n = 100 - x_n$ la distance qui sépare encore M de A au même instant. Neper appelle y_n le *logarithme* de r_n.

1) Exprimer y_n et r_n en fonction de n. Préciser la nature de chacune des suites (y_n) et (r_n).
2) Recopier et compléter le tableau ci-dessous (aucune justification n'est demandée ; arrondir r_n au centième).

n	0	1	2	3	4	5
r_n	100	90				
y_n	0	10				

3) Montrer que, pour tous entiers naturels m et p, $r_m \times r_p = 100 \times r_{m+p}$. Vérifier cette égalité avec $m = 2$ et $p = 3$, et comparer $y_2 + y_3$ et y_5.
4) Expliquer en une phrase pourquoi une table des valeurs de r_n et de y_n pouvait rendre service aux astronomes du XVII^{e} siècle, qui devaient multiplier de grands nombres.

Exercice 4

4,5 points

Les questions sont indépendantes.

1) Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $u_n = 5 - 3 \times 0{,}4^n + \dfrac{2}{n}$.
2) Une suite (v_n) vérifie, pour tout entier $n \geqslant 1$, $7 - \dfrac{3}{n} \leqslant v_n \leqslant 7 + 2 \times 0{,}5^n$. Déterminer la limite de la suite (v_n) en citant le théorème utilisé.
3) Une suite (w_n) vérifie, pour tout entier naturel n, $w_n \geqslant 2 \times 1{,}5^n$. Que peut-on en déduire pour la limite de la suite (w_n) ? Justifier.
4) Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 6 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier naturel n tel que $t_n < 0{,}01$.

Bonus

hors barème

On note d_n le nombre décimal qui s'écrit avec n chiffres 9 après la virgule : $d_1 = 0{,}9$, $d_2 = 0{,}99$, $d_3 = 0{,}999$, etc. En écrivant d_n comme une somme de termes d'une suite géométrique, déterminer la limite de la suite (d_n). Que peut-on en conclure sur le nombre « $0{,}999\ldots$ » (une infinité de 9) ?