Exercice 1 — Deux suites géométriques

3 points

1) **a.** $u_0 = 250 \times 1{,}04^0 = 250$; $u_1 = 250 \times 1{,}04 = 260$; $u_3 = 250 \times 1{,}04^3 = 281{,}216 \approx 281{,}22$.
$\boxed{u_0 = 250}$ $\boxed{u_1 = 260}$ $\boxed{u_3 \approx 281{,}22}$

b. Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 250 \times 1{,}04^{n+1} = 1{,}04 \times 250 \times 1{,}04^n = 1{,}04\,u_n$: la suite (u_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } 1{,}04}$ et de premier terme 250.
Comme $1{,}04 > 1$ et $u_0 = 250 > 0$, la suite (u_n) est $\boxed{\text{croissante}}$.

c. $1{,}04 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}04^n = +\infty$ et, en multipliant par $250 > 0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2) **a.** (v_n) est géométrique de raison $0{,}6$ et de premier terme 80, donc pour tout entier naturel n, $\boxed{v_n = 80 \times 0{,}6^n}$.
$v_3 = 80 \times 0{,}6^3 = 80 \times 0{,}216 = \boxed{17{,}28}$.

b. $0 < 0{,}6 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}6^n = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

c. $t_n = 100 - v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 100}$.

Exercice 2 — Une forêt gérée

2,5 points

1) Abattre $4\,\%$ des arbres, c'est multiplier leur nombre par $1 - 0{,}04 = 0{,}96$.
$a_1 = 0{,}96 \times 5\,000 + 150 = 4\,800 + 150 = 4\,950$; $a_2 = 0{,}96 \times 4\,950 + 150 = 4\,752 + 150 = 4\,902$.
$\boxed{a_1 = 4\,950}$ $\boxed{a_2 = 4\,902}$

2) Au cours de l'année, les a_n arbres sont d'abord réduits de $4\,\%$ (il en reste $0{,}96\,a_n$), puis 150 arbres sont plantés : $\boxed{a_{n+1} = 0{,}96\,a_n + 150}$.

3) $\dfrac{a_1}{a_0} = \dfrac{4\,950}{5\,000} = 0{,}99$ et $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{4\,902}{4\,950} \approx 0{,}9903 \neq 0{,}99$. Le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant : la suite (a_n) $\boxed{\text{n'est pas géométrique}}$. (La plantation de 150 arbres s'ajoute : la relation n'est pas de la forme $a_{n+1} = q\,a_n$.)

Exercice 3 — Lecture d'un nuage de termes

3 points

1) On lit les ordonnées des trois premiers points : $\boxed{u_0 = 10}$, $\boxed{u_1 = 6}$, $\boxed{u_2 = 4}$.

2) Les points sont de plus en plus bas et se rapprochent de la droite d'ordonnée 2 : on conjecture que la suite (u_n) est $\boxed{\text{décroissante}}$ et que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

3) Si la suite était géométrique, le quotient de deux termes consécutifs serait constant. Or $\dfrac{u_1}{u_0} =$

$\frac{6}{10} = 0{,}6$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{6} \approx 0{,}67$. Les quotients sont différents : la suite $\boxed{\text{n'est pas géométrique}}$.

4) $u_2 = 2 + 8 \times 0{,}5^2 = 2 + 8 \times 0{,}25 = 2 + 2 = 4$: c'est bien la valeur lue.
$0 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} 8 \times 0{,}5^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$. La conjecture est confirmée.

Exercice 4 — Un étang de truites

4 points

1) La boucle doit appliquer n fois la relation de récurrence :

```
def truites(n):
    N = 2
    for i in range(n):
        N = N + 0.1*N*(8-N)
    return N
```

2) `truites(1)` applique une fois la relation à partir de $N_0 = 2$: elle renvoie N_1.
$N_1 = 2 + 0{,}1 \times 2 \times (8 - 2) = 2 + 0{,}1 \times 2 \times 6 = 2 + 1{,}2 = 3{,}2$. $\boxed{\texttt{truites(1)} \text{ renvoie } 3{,}2}$
Interprétation : au bout d'un mois, l'étang compte $3{,}2$ centaines de truites, soit 320 truites.

3) On avance tant que le seuil n'est pas atteint, en comptant les mois :

```
def seuil():
    N = 2
    t = 0
    while N < 7.5:
        N = N + 0.1*N*(8-N)
        t = t + 1
    return t
```

À la calculatrice (valeurs arrondies au millième) : $N_1 = 3{,}2$; $N_2 = 4{,}736$; $N_3 \approx 6{,}282$; $N_4 \approx 7{,}361$; $N_5 \approx 7{,}831$.
$N_4 < 7{,}5$ et $N_5 \geqslant 7{,}5$: la fonction renvoie $\boxed{5}$. La population dépasse 750 truites au bout de 5 mois.

4) Les termes 2 ; $3{,}2$; $4{,}736$; $6{,}282$; $7{,}361$; $7{,}831$; $7{,}963\ldots$ augmentent de moins en moins vite et se rapprochent de 8 : la population $\boxed{\text{croît puis se stabilise autour de } 800 \text{ truites}}$.
Interprétation : 8 centaines, c'est la capacité d'accueil de l'étang ; lorsque N_t s'approche de 8, le facteur $(8 - N_t)$ devient presque nul et la population n'augmente plus.

Exercice 5 — La décrue d'une épidémie

5 points

1) Diminuer de $15\,\%$, c'est multiplier par $1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
$c_1 = 0{,}85 \times 2\,400 = 2\,040$ et $c_2 = 0{,}85 \times 2\,040 = 1\,734$. $\boxed{c_1 = 2\,040}$ $\boxed{c_2 = 1\,734}$

2) Pour tout entier naturel n, $c_{n+1} = 0{,}85\,c_n$: on passe d'une semaine à la suivante en multipliant par le même nombre $0{,}85$. La suite (c_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } 0{,}85}$ et de premier terme

$c_0 = 2\,400$, donc

$$\boxed{c_n = 2\,400 \times 0{,}85^n}.$$

3) $c_4 = 2\,400 \times 0{,}85^4 = 2\,400 \times 0{,}522\,006\,25 = 1\,252{,}815 \approx \boxed{1\,253 \text{ nouveaux cas}}$.

4) $0 < 0{,}85 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}85^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0}$.

Interprétation : selon ce modèle, le nombre de nouveaux cas hebdomadaires finit par devenir aussi petit que l'on veut : l'épidémie s'éteint.

5) L'épidémie est terminée la première semaine n telle que $c_n < 100$, soit

$$\boxed{2\,400 \times 0{,}85^n < 100} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0{,}85^n < \frac{100}{2\,400} = \frac{1}{24} \approx 0{,}041\,7.$$

La suite (c_n) est décroissante. À la calculatrice (table de valeurs) : $c_{19} = 2\,400 \times 0{,}85^{19} \approx 109{,}4 > 100$ et $c_{20} = 2\,400 \times 0{,}85^{20} \approx 93{,}0 < 100$.
L'épidémie est déclarée terminée la $\boxed{\text{semaine } 20}$, soit 20 semaines après le pic.

6) Six mois représentent environ 26 semaines. Or, d'après le modèle, l'épidémie est terminée dès la semaine 20 après le pic, soit un peu moins de cinq mois. L'affirmation du journal $\boxed{\text{n'est pas compatible avec le modèle}}$: au rythme d'une baisse de $15\,\%$ par semaine, la fin de l'épidémie arrive avant six mois.

Exercice 6 — Limites et seuils

2,5 points

1) $1{,}25 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1{,}25^n = +\infty$; en multipliant par $3 > 0$: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty}$.

$0 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times 0{,}7^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 2}$.

2) La suite $(0{,}7^n)$ est décroissante. À la calculatrice : $0{,}7^{12} \approx 0{,}013\,8 > 0{,}01$ et $0{,}7^{13} \approx 0{,}009\,7 < 0{,}01$. Le plus petit entier cherché est $\boxed{n = 13}$.

3) La suite $(1{,}25^n)$ est croissante. À la calculatrice : $1{,}25^{30} \approx 807{,}8 < 1\,000$ et $1{,}25^{31} \approx 1\,009{,}7 > 1\,000$. Le plus petit entier cherché est $\boxed{n = 31}$.