Exercice 1 — Cinq questions pour commencer

5 points

Aucune justification n'était demandée ; les explications ci-dessous sont données pour comprendre.

1) **Réponse** **(a)** : $u_1 = 3\times 2-4 = 2$, puis $u_2 = 3\times 2-4 = 2$. La suite est constante, car $2 = 3\times 2-4$.

2) **Réponse** **(b)** : $0 < 0{,}8 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}8^n = 0$.

3) **Réponse** **(b)** : diminuer de $5\,\%$, c'est multiplier par $1 - \dfrac{5}{100} = 0{,}95$, donc $P_{n+1} = 0{,}95\,P_n$.

4) **Réponse** **(c)** : $\ell = 0{,}5\,\ell + 4 \iff 0{,}5\,\ell = 4 \iff \ell = 8$.

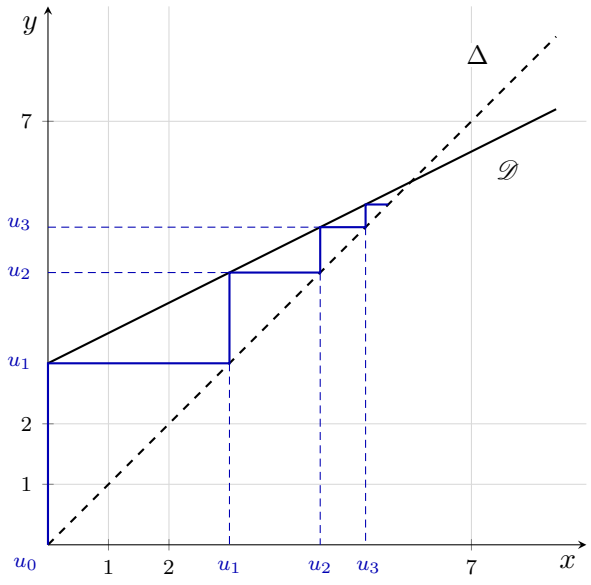
5) **Réponse** **(b)** : $3 > 1$ donc (3^n) est croissante de limite $+\infty$; en multipliant par $-2 < 0$, (-2×3^n) est décroissante de limite $-\infty$, et ajouter 7 ne change ni le sens de variation ni le fait que la limite soit $-\infty$.

Exercice 2 — Un escalier vers la limite

7 points

1) $u_1 = f(u_0) = 0{,}5\times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = f(u_1) = 0{,}5\times 3 + 3 = 4{,}5$. $\boxed{u_1 = 3}$ $\boxed{u_2 = 4{,}5}$

2) On part de $u_0 = 0$ sur l'axe des abscisses ; on monte jusqu'à $\mathscr{D}$ pour lire $u_1 = f(u_0)$ en ordonnée ; on reporte cette valeur sur l'axe des abscisses grâce à Δ ($y = x$), et on recommence.



On lit $u_1 = 3$, $u_2 = 4{,}5$ et $u_3 \approx 5{,}3$ (valeur exacte $u_3 = 0{,}5\times 4{,}5 + 3 = 5{,}25$).

3) Les termes se déplacent vers la droite en se rapprochant du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ, d'abscisse 6. On conjecture que la suite (u_n) est croissante et que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$.

4) **a.** La suite constante égale à ℓ vérifie la relation si et seulement si

$$\ell = 0{,}5\,\ell + 3 \iff 0{,}5\,\ell = 3 \iff \ell = 6. \qquad \boxed{\ell = 6}$$

(C'est l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{D}$ et de Δ.)

b. Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0{,}5\,u_n + 3 - 6 = 0{,}5\,u_n - 3 = 0{,}5\,(u_n - 6) = 0{,}5\,v_n.$$

La suite (v_n) est donc $\boxed{\text{géométrique de raison } 0{,}5}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = \boxed{-6}$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 0{,}5^n$, soit $\boxed{v_n = -6 \times 0{,}5^n}$.
Comme $u_n = v_n + 6$: $\boxed{u_n = 6 - 6 \times 0{,}5^n}$.
Vérification : $u_0 = 6 - 6 = 0$ et $u_1 = 6 - 3 = 3$.

d. *Sens de variation :* pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \left(6 - 6 \times 0{,}5^{n+1}\right) - \left(6 - 6 \times 0{,}5^n\right) = 6 \times 0{,}5^n - 6 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n = 3 \times 0{,}5^n > 0,$$

donc la suite (u_n) est bien $\boxed{\text{croissante}}$.
Limite : $0 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 6 \times 0{,}5^n = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$. Les deux conjectures sont validées.

5) On procède de même avec $t_n = w_n - 6$: $t_{n+1} = 0{,}5\,t_n$ (le calcul de la question 4) b. ne dépend pas du premier terme), avec $t_0 = w_0 - 6 = 4$. Donc $t_n = 4 \times 0{,}5^n$ et $\boxed{w_n = 6 + 4 \times 0{,}5^n}$.
Vérification : $w_1 = 0{,}5 \times 10 + 3 = 8 = 6 + 4 \times 0{,}5$.
Plus généralement, toute suite vérifiant la relation s'écrit $6 + (w_0 - 6) \times 0{,}5^n$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, $\boxed{\text{toutes ces suites ont pour limite } 6}$, quel que soit le premier terme (ici (w_n) est décroissante vers 6, (u_n) croissante vers 6).

Exercice 3 — Les tables d'intérêt de Simon Stevin

8 points

Partie A — Le capital d'un marchand

1) Augmenter de $10\,\%$, c'est multiplier par $1 + \dfrac{10}{100} = 1{,}1$.
$C_1 = 1{,}1 \times 1\,000 = 1\,100$ et $C_2 = 1{,}1 \times 1\,100 = 1\,210$. $\boxed{C_1 = 1\,100 \text{ écus}}$ $\boxed{C_2 = 1\,210 \text{ écus}}$

2) Pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = 1{,}1\,C_n$: on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même nombre $1{,}1$, donc (C_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } 1{,}1}$ et de premier terme $C_0 = 1\,000$.
Ainsi, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{C_n = 1\,000 \times 1{,}1^n}.$$

3) Le capital a doublé lorsque $C_n \geqslant 2\,000$, c'est-à-dire $1{,}1^n \geqslant 2$. Dans la table, $1{,}1^7 \approx 1{,}9487 < 2$ et $1{,}1^8 \approx 2{,}1436 > 2$; comme la suite $(1{,}1^n)$ est croissante, le capital dépasse le double pour la première fois au bout de $\boxed{8 \text{ ans}}$ ($C_8 \approx 2\,144$ écus).

4) **a.** $1{,}1^3 \times 1{,}1^5 = \underbrace{1{,}1 \times 1{,}1 \times 1{,}1}_{3 \text{ facteurs}} \times \underbrace{1{,}1 \times \cdots \times 1{,}1}_{5 \text{ facteurs}} = 1{,}1^{3+5} = \boxed{1{,}1^8}$.

b. $1{,}331 \approx 1{,}1^3$ et $1{,}6105 \approx 1{,}1^5$, donc $1{,}331 \times 1{,}6105 \approx 1{,}1^8 \approx \boxed{2{,}1436}$ (lu dans la table au rang 8).

c. Pour multiplier deux nombres de la table, $\boxed{\text{on additionne leurs rangs}}$: le produit de deux termes d'une suite géométrique correspond à la somme des rangs, qui suivent une suite arithmétique. C'est l'idée qui mènera, trente ans plus tard, aux logarithmes de Neper.

Partie B — Avec un retrait annuel

1) $R_1 = 1{,}1 \times 1\,000 - 50 = 1\,100 - 50 = 1\,050$ et $R_2 = 1{,}1 \times 1\,050 - 50 = 1\,155 - 50 = 1\,105$.
$\boxed{R_1 = 1\,050 \text{ écus}}$ $\boxed{R_2 = 1\,105 \text{ écus}}$

2) Au cours de l'année $n+1$, le capital R_n est d'abord augmenté de $10\,\%$ (multiplié par $1{,}1$), puis le marchand retire 50 écus : $\boxed{R_{n+1} = 1{,}1\,R_n - 50}$.

3) $\ell = 1{,}1\,\ell - 50 \iff 50 = 0{,}1\,\ell \iff \ell = 500$. $\boxed{\ell = 500}$
(Un capital de 500 écus rapporte exactement 50 écus par an : le retrait le laisse inchangé.)

4) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = R_{n+1} - 500 = 1{,}1\,R_n - 50 - 500 = 1{,}1\,R_n - 550 = 1{,}1\,(R_n - 500) = 1{,}1\,v_n.$$

La suite (v_n) est $\boxed{\text{géométrique de raison } 1{,}1}$, de premier terme $v_0 = R_0 - 500 = 500$. Donc $v_n = 500 \times 1{,}1^n$ et, comme $R_n = v_n + 500$,

$$\boxed{R_n = 500 + 500 \times 1{,}1^n}.$$

Vérification : $R_1 = 500 + 550 = 1\,050$.

5) $R_{10} = 500 + 500 \times 1{,}1^{10} \approx 500 + 500 \times 2{,}5937 = 500 + 1\,296{,}85 = 1\,796{,}85$, soit $\boxed{R_{10} \approx 1\,797 \text{ écus}}$.

6) $S_n = 500 - 100 \times 1{,}1^n$. Comme $1{,}1 > 1$, la suite $(1{,}1^n)$ est croissante de limite $+\infty$; en multipliant par $-100 < 0$ puis en ajoutant 500, la suite (S_n) est $\boxed{\text{décroissante, de limite } -\infty}$.
Par exemple $S_1 = 500 - 110 = 390$, $S_2 = 500 - 121 = 379$: le capital baisse chaque année.
Interprétation : avec 400 écus, les intérêts (40 écus la première année) ne couvrent pas le retrait de 50 écus ; le capital diminue, de plus en plus vite, et finit par s'annuler : le troisième marchand est ruiné (dès la 17e année, car $1{,}1^{17} \approx 5{,}05 > 5$). Le capital de 500 écus est le seuil qui sépare l'enrichissement de la ruine.