Calculatrice interdite

Exercice 1 — Cinq questions pour commencer

5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. **Aucune justification n'est demandée.** Une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 4$. Alors u_2 est égal à :

a) 2 b) 6 c) 10 d) 14

2) La suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0{,}8^n$ a pour limite :

a) $0{,}8$ b) 0 c) 1 d) $+\infty$

3) La population d'un village diminue de $5\,\%$ par an. On note P_n la population au bout de n années, avec $P_0 = 20\,000$. Pour tout entier naturel n :

a) $P_{n+1} = P_n - 5$ b) $P_{n+1} = 0{,}95\,P_n$ c) $P_{n+1} = 1{,}05\,P_n$ d) $P_{n+1} = P_n - 0{,}05$

4) La suite constante égale au réel ℓ vérifie la relation $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 4$ pour tout entier naturel n. Alors ℓ est égal à :

a) 4 b) 2 c) 8 d) $0{,}5$

5) La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = 7 - 2 \times 3^n$ est :

a) croissante, de limite $+\infty$ b) décroissante, de limite $-\infty$
c) décroissante, de limite 7 d) croissante, de limite 7

Exercice 2 — Un escalier vers la limite

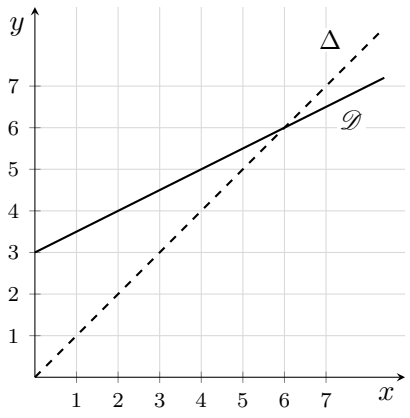
7 points

On considère la fonction f définie sur $[0\,;8]$ par $f(x) = 0{,}5x + 3$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Calculer u_1 et u_2.

2) Sur la figure ci-contre sont tracées la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = f(x)$ et la droite Δ d'équation $y = x$. Construire sur cette figure, **à rendre avec la copie**, les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses, en laissant apparents les traits de construction.

3) Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite.



4) **a.** Déterminer le réel ℓ tel que la suite constante égale à ℓ vérifie la relation $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$.

b. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 6$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

c. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

d. Valider les deux conjectures de la question 3).

5) Une suite (w_n) vérifie la même relation $w_{n+1} = 0{,}5\,w_n + 3$ pour tout entier naturel n, mais $w_0 = 10$. Exprimer w_n en fonction de n. Que peut-on dire de la limite de toute suite vérifiant cette relation ?

Exercice 3 — Les tables d'intérêt de Simon Stevin

8 points

En 1582, le mathématicien flamand Simon Stevin publie à Anvers des *Tables d'intérêt* : elles donnent, année après année, la valeur d'un capital placé à intérêts composés, et évitent aux marchands de longues multiplications. Dans tout l'exercice, un capital est placé à $10\,\%$ par an : **chaque année, il augmente de** $10\,\%$.

Partie A — Le capital d'un marchand

Un marchand place $1\,000$ écus. On note C_n son capital, en écus, au bout de n années ; ainsi $C_0 = 1\,000$.

1) Calculer C_1 et C_2.

2) Justifier que la suite (C_n) est géométrique et exprimer C_n en fonction de n.

3) Voici un extrait de la table de Stevin, qui donne les valeurs approchées des puissances de $1{,}1$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1{,}1^n$	1	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,6105	1,7716	1,9487	2,1436	2,3579	2,5937

Au bout de combien d'années le capital du marchand a-t-il doublé ? Justifier à l'aide de la table.

4) Stevin remarque que sa table permet aussi de *multiplier*.

a. Justifier que $1{,}1^3 \times 1{,}1^5 = 1{,}1^8$.

b. En déduire, sans poser la multiplication, une valeur approchée du produit $1{,}331 \times 1{,}6105$.

c. Plus généralement, pour multiplier deux nombres de la table, que fait-on sur leurs rangs n ?

Partie B — Avec un retrait annuel

Un second marchand place lui aussi $1\,000$ écus à $10\,\%$ par an mais, à la fin de chaque année, **après** le versement des intérêts, il retire 50 écus pour ses dépenses. On note R_n son capital, en écus, au bout de n années ; ainsi $R_0 = 1\,000$.

1) Calculer R_1 et R_2.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $R_{n+1} = 1{,}1\,R_n - 50$.

3) Déterminer le réel ℓ tel que la suite constante égale à ℓ vérifie cette relation.

4) On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = R_n - 500$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $1{,}1$ et en déduire que $R_n = 500 + 500 \times 1{,}1^n$.

5) À l'aide de la table de la partie A, donner une valeur approchée de R_{10} à l'écu près.

6) Un troisième marchand ne place que 400 écus, aux mêmes conditions, et retire lui aussi 50 écus par an. On note S_n son capital au bout de n années. On admet que $S_n = 500 - 100 \times 1{,}1^n$. Décrire l'évolution de son capital et interpréter dans le contexte.