Exercice 1

3 points

1) On applique la relation de récurrence avec $n = 0$, puis $n = 1$, puis $n = 2$:

$$u_1 = u_0 - 2 \times 0 + 1 = -7 + 1 = \boxed{-6}$$
$$u_2 = u_1 - 2 \times 1 + 1 = -6 - 1 = \boxed{-7}$$
$$u_3 = u_2 - 2 \times 2 + 1 = -7 - 3 = \boxed{-10}$$

2) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = -2n + 1$.

- Pour $n = 0$: $u_1 - u_0 = 1 > 0$, donc $u_1 > u_0$.
- Pour $n \geqslant 1$: $-2n + 1 \leqslant -2 + 1 = -1 < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$.

La suite (u_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$ (elle croît de u_0 à u_1), mais :

$\boxed{(u_n) \text{ est strictement décroissante à partir du rang } 1.}$

Exercice 2

4 points

1) **a.** Pour tout entier naturel n, $3^{n+1} > 0$ et $6^n > 0$ (puissances de nombres strictement positifs), donc le quotient est strictement positif : $\boxed{u_n > 0}$.

b. Les termes sont strictement positifs, on peut comparer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+2}}{6^{n+1}} \times \frac{6^n}{3^{n+1}} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} \times \frac{6^n}{6^{n+1}} = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$ et $u_n > 0$, on a $u_{n+1} < u_n$ pour tout n : la suite (u_n) est $\boxed{\text{strictement décroissante}}$.

2) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)}$$
$$= \frac{n^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n - 3}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}.$$

Comme $n \geqslant 0$, le dénominateur est strictement positif, donc $v_{n+1} - v_n > 0$: la suite (v_n) est $\boxed{\text{strictement croissante}}$.

Exercice 3

3 points

On a $u_n = f(n)$ avec f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

f est dérivable et $f'(x) = 2x - 3$; $f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant \dfrac{3}{2}$. (On peut aussi dire : f est un polynôme du second degré avec $a = 1 > 0$, de sommet d'abscisse $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$.)

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	

f est strictement croissante sur $\left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{3}{2} \leqslant n < n+1$, donc $f(n) < f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n < u_{n+1}$.

Par ailleurs $u_0 = 2$, $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$: $u_0 > u_1$ et $u_1 = u_2$.

Conclusion : la suite (u_n) est croissante à partir du rang 1 (strictement à partir du rang 2) ; elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

Exercice 4

4 points

Données utiles. Dans le triangle ABE rectangle en E : $AE = AB\cos 60° = 3 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ et $BE = AB\sin 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Dans le triangle ACD rectangle en D : $AC = \dfrac{AD}{\cos 30°} = \dfrac{10}{\sqrt{3}}$.

1) E est le projeté orthogonal de B sur (AD), et E appartient à la demi-droite $[AD)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} = AE \times AD = \dfrac{3}{2} \times 5 = 7{,}5 > 0$. Réponses **B, C et D**.

2) $(CD) \perp (AD)$, donc $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. De même $(DC) \perp (AE)$, donc $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$. Enfin, avec la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = 7{,}5 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$. Le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur la direction de (DC) est $\overrightarrow{EB}$, de sens contraire à $\overrightarrow{DC}$: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = -EB \times DC = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{5}{\sqrt{3}} = -7{,}5$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. En revanche $CD \times AD \neq 0$. Réponses **B, C et D**.

3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}\right) \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 - BE^2$, car $(AE) \perp (BE)$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BE} = -BE^2 = -\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\dfrac{27}{4}$. Réponses **C et D**.

4) D est le projeté orthogonal de C sur (AD) : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=AD^2=25$. Avec la formule du cosinus : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=AD\times AC\times\cos 30°=5\times AC\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}AC$ (et l'on retrouve $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{10}{\sqrt{3}}=25$). Réponses **A, B et D**.

Exercice 5

6 points

Le triangle est isocèle en A, donc $AC=AB=4$.

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}=4\times 4\times\cos 45°=16\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}$. L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu, le produit scalaire est positif : $8\sqrt{2}\neq -8\sqrt{2}$. L'affirmation est fausse.

2) B' est le milieu de $[AC]$, donc $B'\in[AC]$, $AB'=2$ et $\widehat{BAB'}=\widehat{BAC}=45°$:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}=AB\times AB'\times\cos 45°=4\times 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}.$$

L'affirmation est vraie.

3) Dans le triangle isocèle ABC, les angles à la base sont égaux : $\widehat{ACB}=\dfrac{180°-45°}{2}=67{,}5°$. Donc

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=CB\times CA\times\cos\widehat{BCA}=CB\times 4\times\cos(67{,}5°)=4\times CB\times\cos(67{,}5°).$$

L'affirmation est vraie.