Exercice 1

4 points

1) Si $m = 0$, l'équation devient $3x + 4 = 0$, qui n'a qu'une solution. Si $m \neq 0$, c'est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times m \times 4 = 9 - 16m$; elle admet deux solutions si et seulement si $\Delta > 0$, soit $m < \dfrac{9}{16}$. Deux solutions $\iff m \in]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,\dfrac{9}{16}[$. Réponse **A**

2) $100x^2 - 1 = (10x - 1)(10x + 1)$ a pour racines $-0{,}1$ et $0{,}1$. Un polynôme du second degré de coefficient $100 > 0$ est strictement positif à l'extérieur de ses racines : $100x^2 - 1 > 0 \iff x \in]-\infty\,;\,-0{,}1[\cup]0{,}1\,;\,+\infty[$. (A et B sont fausses : en $x = 0$, l'expression vaut -1.) Réponse **C**

3) $u_{n+1} = 4(n+1)^2 - 5(n+1) + 2 = 4n^2 + 8n + 4 - 5n - 5 + 2 = 4n^2 + 3n + 1$. Réponse **C**

4) On multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{a} + \sqrt{b}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}.$$

Réponse **A**

5) Par définition, $\tau(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$. Réponse **B**

Exercice 2

4 points

1) Pour $h \neq 0$:

$f(1+h) = 2(1+h)^2 - (1+h) + 1 = 2 + 4h + 2h^2 - 1 - h + 1 = 2h^2 + 3h + 2$ et $f(1) = 2 - 1 + 1 = 2$,

donc

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h^2 + 3h}{h} = 2h + 3.$$

Quand h tend vers 0, $2h + 3$ tend vers 3, nombre réel. Donc f est dérivable en 1 et $\boxed{f'(1) = 3}$.

2) Pour $h \neq 0$ et $h \neq -3$:

$$\frac{g(3+h) - g(3)}{h} = \frac{\dfrac{6}{3+h} - 2}{h} = \frac{6 - 2(3+h)}{h(3+h)} = \frac{-2h}{h(3+h)} = \frac{-2}{3+h}.$$

Quand h tend vers 0, $\dfrac{-2}{3+h}$ tend vers $-\dfrac{2}{3}$, nombre réel. Donc g est dérivable en 3 et $\boxed{g'(3) = -\dfrac{2}{3}}$.

Exercice 3

7 points

Partie A

1) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - n^2 - 3n = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - n^2 - 3n = 2n + 4.$$

Comme $n \geqslant 0$, $2n + 4 > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

2) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = 2 - 1{,}5^{n+1} - 2 + 1{,}5^n = 1{,}5^n(1 - 1{,}5) = -0{,}5 \times 1{,}5^n.$$

Comme $1{,}5^n > 0$, $v_{n+1} - v_n < 0$: la suite (v_n) est strictement décroissante.

3) Pour tout entier naturel n, $p_{n+1} - p_n = n^2 + n + 1$. Comme $n \geqslant 0$, $n^2 + n + 1 \geqslant 1 > 0$: la suite (p_n) est strictement croissante.

Partie B

1) Augmenter de $4\,\%$ revient à multiplier par $1{,}04$, puis on ajoute 13 :

$u_1 = 300 \times 1{,}04 + 13 = 312 + 13 = \boxed{325 \text{ m}^2}$ $\quad$ $u_2 = 325 \times 1{,}04 + 13 = 338 + 13 = \boxed{351 \text{ m}^2}$.

2) D'une semaine à la suivante, l'aire u_n augmente de $4\,\%$, ce qui donne $u_n \times 1{,}04$, puis de 13 m^2. Donc, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} = 1{,}04\,u_n + 13}$.

3) Fonction complétée :

```
def aire(n):
    U = 300
    for i in range(1, n+1):
        U = 1.04*U + 13
    return U
```

La boucle s'exécute n fois : on part de $u_0 = 300$ et on calcule successivement u_1, u_2, …, u_n.

4) À la calculatrice (ou avec `aire(10)`) : $u_{10} \approx \boxed{600{,}15 \text{ m}^2}$. Au bout de 10 semaines, les chardons couvrent environ 600 m^2, soit deux fois plus qu'au départ.

Exercice 4

5 points

1) **a.** Les droites (MN) et (CB) sont parallèles, $M \in [AC]$ et $N \in (AB)$: d'après le théorème de Thalès dans le triangle ABC,

$$\frac{MN}{CB} = \frac{AM}{AC}, \quad \text{donc} \quad MN = \frac{x}{12} \times 6 = \frac{x}{2}.$$

Le triangle AMN est rectangle en M (car $(MN) \parallel (CB)$ et $(CB) \perp (AC)$), d'aire $\dfrac{AM \times MN}{2} = \dfrac{1}{2} \times x \times \dfrac{x}{2} = \dfrac{x^2}{4}$.
Le rectangle $MCDP$ a pour dimensions $MC = 12 - x$ et $CD = 4$, d'aire $4(12-x) = 48 - 4x$.
Donc $\boxed{\mathcal{A}(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 4x + 48}$.

b. M parcourt le segment $[AC]$ et $AC = 12$, donc $0 \leqslant x \leqslant 12$: $\mathcal{A}$ est définie sur $\boxed{[0\,;\,12]}$.

2) a. $\mathcal{A}$ est un polynôme du second degré avec $a = \dfrac{1}{4} > 0$; son minimum est atteint en

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8,$$

avec $\mathcal{A}(8) = 16 - 32 + 48 = 32$. De plus $\mathcal{A}(0) = 48$ et $\mathcal{A}(12) = 36 - 48 + 48 = 36$.

x	0		8		12
$\mathcal{A}(x)$	48	↘	32	↗	36

L'aire grisée est minimale, égale à 32 cm^2, lorsque $\boxed{AM = 8 \text{ cm}}$.

b. On résout $\mathcal{A}(x) = 33$ sur $[0\,;\,12]$:

$$\frac{1}{4}x^2 - 4x + 48 = 33 \iff \frac{1}{4}x^2 - 4x + 15 = 0 \iff x^2 - 16x + 60 = 0.$$

$\Delta = (-16)^2 - 4 \times 1 \times 60 = 256 - 240 = 16 > 0$, d'où deux solutions :

$$x_1 = \frac{16 - 4}{2} = 6 \qquad x_2 = \frac{16 + 4}{2} = 10.$$

Les deux appartiennent à $[0\,;\,12]$. L'aire grisée vaut 33 cm^2 lorsque $\boxed{AM = 6 \text{ cm}}$ ou $\boxed{AM = 10 \text{ cm}}$.