Exercice 1

3,5 points

1) Pour $h \neq 0$, on calcule le taux de variation de f entre 5 et $5+h$. On a $f(5) = 25 - 5 - 10 = 10$ et :

$$f(5+h) = (5+h)^2 - (5+h) - 10 = 25 + 10h + h^2 - 5 - h - 10 = h^2 + 9h + 10.$$

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{h^2 + 9h}{h} = h + 9.$$

Quand h tend vers 0, $h+9$ tend vers 9 : f est dérivable en 5 et $\boxed{f'(5) = 9}$.

Autre méthode : $f'(x) = 2x - 1$, donc $f'(5) = 10 - 1 = 9$.

2) La tangente T au point d'abscisse 5 a pour équation $y = f'(5)(x-5) + f(5)$:

$$y = 9(x-5) + 10 = 9x - 45 + 10, \qquad \boxed{T : y = 9x - 35}$$

3) Pour $x = 100$: $9 \times 100 - 35 = 865 \neq -905$. Les coordonnées de R ne vérifient pas l'équation de T :

$$\boxed{R \notin T}$$

Exercice 2

1,5 point

Le nombre dérivé $g'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a ; on le lit sur le quadrillage (déplacement vertical pour un déplacement horizontal de 1).

- En $B(0\,;\,1)$, la tangente passe aussi par $(1\,;\,4)$: $\boxed{g'(0) = 3}$.
- En $C(2\,;\,3)$, la tangente passe aussi par $(5\,;\,0)$: pente $\dfrac{0-3}{5-2}$, donc $\boxed{g'(2) = -1}$.
- En $A(-3\,;\,0)$, la tangente passe aussi par $(-4\,;\,3)$: pente $\dfrac{3-0}{-4-(-3)}$, donc $\boxed{g'(-3) = -3}$.
- En D, la tangente est horizontale : $\boxed{g'(4{,}5) = 0}$.

Exercice 3

2,5 points

Deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Il suffit donc de montrer que $f'\left(\frac{1}{2}\right) = g'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Pour f. Pour $h \neq 0$:

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \frac{4\left(\frac{1}{4}+h+h^2\right)-1}{h} = \frac{4h+4h^2}{h} = 4+4h \xrightarrow[h\to 0]{} 4, \quad \text{donc } f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

Pour g. Pour $h \neq 0$ (avec $\frac{1}{2}+h \neq 0$), $g\left(\frac{1}{2}\right) = -2$ et :

$$\frac{g\left(\frac{1}{2}+h\right) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = \frac{-\frac{2}{1+2h}+2}{h} = \frac{\frac{-2+2+4h}{1+2h}}{h} = \frac{4}{1+2h} \xrightarrow[h\to 0]{} 4, \quad \text{donc } g'\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

Autre méthode : $f'(x) = 8x$ et $g'(x) = \frac{1}{x^2}$, d'où $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1/4} = 4$.

Les deux tangentes ont le même coefficient directeur 4 (leurs équations sont $y = 4x-1$ et $y = 4x-4$) :

Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$ en leurs points d'abscisse $\frac{1}{2}$ sont parallèles.

Exercice 4

3,5 points

1) $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}8-5\\-9+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BR}\begin{pmatrix}2+2\\-1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, donc

$$\overrightarrow{AL}\cdot\overrightarrow{BR}=3\times 4+(-6)\times 2=12-12=0.$$

Les vecteurs directeurs sont orthogonaux : les droites (AL) et (BR) sont perpendiculaires. Vrai

2) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2-2\,\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=16-2\times(-2)+36=56$. Donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{56}=\sqrt{4\times 14}=2\sqrt{14}$. Vrai

3) $f(0)=\dfrac{1}{2}$. Pour $h\neq 0$ assez petit ($h\in[-1\,;\,4]$) :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{\frac{1}{h+2}-\frac{1}{2}}{h}=\frac{\frac{2-(h+2)}{2(h+2)}}{h}=\frac{-h}{2h(h+2)}=\frac{-1}{2(h+2)}\xrightarrow[h\to 0]{}-\frac{1}{4}.$$

f est bien dérivable en 0, mais $f'(0)=-\dfrac{1}{4}\neq-\dfrac{1}{2}$. Faux

4) $f(2)=\sqrt{2}$. Pour $h\neq 0$ avec $h\geqslant -2$ (afin que $2+h\geqslant 0$), le taux de variation de f entre 2 et $2+h$ vaut :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\frac{\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)-2}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}.$$

Quand h tend vers 0, ce taux tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$: f est dérivable en 2 et $f'(2)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Vrai

Remarque : on retrouve la formule $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x=2$.

5) Pour $m=-10$: $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-40\\10\end{pmatrix}$, donc

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times(-40)+12\times 10=-120+120=0.$$

Les vecteurs sont orthogonaux. Vrai

Exercice 5

5 points

a. On connaît deux longueurs et l'angle : les codages donnent $AC = AB = 6$, et $\widehat{BAC} = 30°$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{18\sqrt{3}} \approx 31{,}18.$$

b. H est le projeté orthogonal de C sur (AB), et H est le milieu de $[AB]$: $AH = 3$, $AB = 6$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = AB \times AH = 6 \times 3 = \boxed{18}.$$

c. H est le projeté orthogonal de C sur (AB), situé du côté opposé à B par rapport à A. Dans le triangle CHB rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$HB^2 = CB^2 - CH^2 = 36 - 9 = 27, \quad HB = \sqrt{27} = 3\sqrt{3},$$

$$\text{d'où } AH = HB - AB = 3\sqrt{3} - 4 \ (\approx 1{,}20).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \times AH = -4\left(3\sqrt{3} - 4\right) = \boxed{16 - 12\sqrt{3}} \approx -4{,}78.$$

d. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AR}\right)$: $A(0\,;\,0)$, $B\left(1\,;\,\frac{1}{2}\right)$ (milieu de $[QP]$), $C\left(\frac{1}{2}\,;\,1\right)$ (milieu de $[RQ]$).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{1}.$$

Exercice 6

4 points

M est sur $[AB]$, distinct de A : $0 < x \leqslant 5$, et $MB = 5 - x$.

1) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

- $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de sens contraires : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \times AB = -5x$;
- $(AB) \perp (BC)$ et $(AD) \perp (AB)$: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$;
- $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = AD^2 = 4$.

$$\boxed{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 5x}$$

2) $(MD) \perp (AC) \iff \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff 4 - 5x = 0 \iff x = \frac{4}{5}$, qui appartient bien à $]0\,;\,5]$.

$$\boxed{x = \frac{4}{5} = 0{,}8}$$

3) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

$\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont de sens contraires : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -x(5-x) = x^2 - 5x$; les deux produits du milieu sont nuls (vecteurs orthogonaux) et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = AD^2 = 4$.

$$\boxed{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = x^2 - 5x + 4}$$

4) Le triangle MCD est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \iff (x-1)(x-4) = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = 4.$$

(Discriminant $\Delta = 25 - 16 = 9$, racines $\dfrac{5-3}{2} = 1$ et $\dfrac{5+3}{2} = 4$.) Les deux valeurs sont dans $]0\,;\,5]$.

$$\boxed{x = 1 \text{ ou } x = 4}$$