Exercice 1

5 points

Partie A – Lecture graphique

1) Sur $[-2\,;\,2]$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est tracée « d'un seul trait », sans point anguleux : en chaque point, elle admet une tangente (non verticale).

$$\boxed{f \text{ paraît dérivable sur } [-2\,;\,2].}$$

2) **a.** Le point $A(-2\,;\,-18)$ est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse -2, et $C(1\,;\,9)$ celui d'abscisse 1 :

$$\boxed{f(-2) = -18} \qquad \boxed{f(1) = 9}$$

b. $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente T_{-2}, qui passe par $A(-2\,;\,-18)$ et $B(0\,;\,-6)$:

$$f'(-2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-6-(-18)}{0-(-2)} = \frac{12}{2}, \qquad \boxed{f'(-2) = 6}$$

De même, $f'(1)$ est le coefficient directeur de T_1, qui passe par $C(1\,;\,9)$ et $D(2{,}5\,;\,0)$:

$$f'(1) = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{0-9}{2{,}5-1} = \frac{-9}{1{,}5}, \qquad \boxed{f'(1) = -6}$$

3) Autour de 0, la courbe « monte » fortement : la tangente au point d'abscisse 0 a un coefficient directeur positif, assez grand (la courbe passe d'environ -7 en $x=-1$ à 9 en $x=1$).

$$\boxed{\text{On conjecture } f'(0) > 0 \text{ (de l'ordre de } 10).}$$

4) **a.** T_{-2} a pour coefficient directeur $f'(-2) = 6$ et coupe l'axe des ordonnées en $B(0\,;\,-6)$, donc son ordonnée à l'origine est -6 :

$$\boxed{T_{-2} : y = 6x - 6}$$

Vérification : $6 \times (-2) - 6 = -18$, c'est bien l'ordonnée de A.

b. Pour $x = 1$: $6 \times 1 - 6 = 0 = y_E$. Les coordonnées de E vérifient l'équation de T_{-2} :

$$\boxed{E(1\,;\,0) \in T_{-2}}$$

5) $f'(x) = 0$ aux abscisses des points où la tangente est horizontale, c'est-à-dire au minimum local et au maximum local de la courbe :

$$\boxed{f'(x) = 0 \iff x \approx -2{,}4 \text{ ou } x \approx 0{,}7}$$

$f'(x) > 0$ là où f est strictement croissante, entre ces deux abscisses :

$$\boxed{f'(x) > 0 \iff x \in \,]-2{,}4\,;\,0{,}7[\text{ (environ)}}$$

Remarque : les valeurs exactes sont calculées à la question B 3).

Partie B – Partie algébrique

1) **a.** f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = -2 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 10 = -6x^2 - 10x + 10.$$

D'où $f(0) = 6$ et $f'(0) = 10$. La tangente T_0 a pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit :

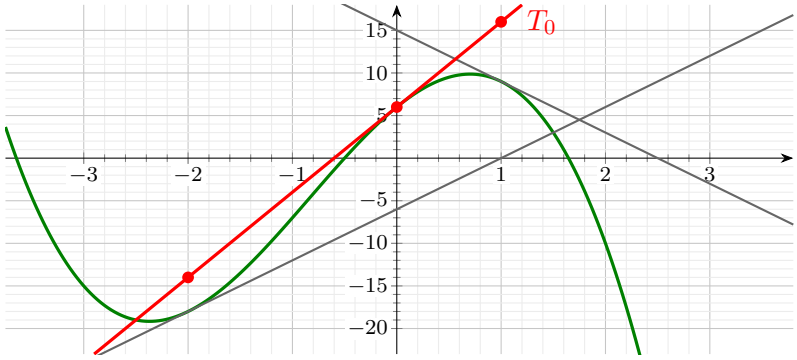
$$\boxed{T_0 : y = 10x + 6}$$

(Cela confirme la conjecture de la question A 3).)

b. Tableau de valeurs de $x \mapsto 10x + 6$:

x	-2	0	1
$10x + 6$	-14	6	16

On place par exemple les points $(-2\,;\,-14)$ et $(1\,;\,16)$ et on trace la droite (en rouge ci-dessous) ; elle passe par le point $(0\,;\,6)$ de la courbe.



2) Puisque $F' = f$, le sens de variation de F est donné par le **signe de** f, c'est-à-dire par la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses. Sur la fenêtre du graphique, on lit que f s'annule en $x = -0{,}5$ et en $x \approx 1{,}6$; $f(x) \leqslant 0$ à gauche de $-0{,}5$ (jusqu'au voisinage du bord gauche de la figure), $f(x) \geqslant 0$ sur $[-0{,}5\,;\,1{,}6]$ et $f(x) \leqslant 0$ à droite de $1{,}6$.

Un troisième zéro se devine tout au bord gauche de la figure, où la courbe repasse au-dessus de l'axe ; sa valeur n'est pas lisible avec précision, on l'obtient par le calcul : on vérifie que $f(x) = -(2x + 1)\left(x^2 + 2x - 6\right)$, dont les racines sont $-1 - \sqrt{7} \approx -3{,}65$, $-\dfrac{1}{2}$ et $-1 + \sqrt{7} \approx 1{,}65$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{7}$		$-0{,}5$		$-1+\sqrt{7}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de F		↗		↘		↗		↘	

F est croissante sur $]-\infty\,;\,-1-\sqrt{7}]$ et sur $[-0{,}5\,;\,-1+\sqrt{7}]$, décroissante sur $[-1-\sqrt{7}\,;\,-0{,}5]$ et sur $[-1+\sqrt{7}\,;\,+\infty[$.

3) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est horizontale si et seulement si son coefficient directeur $f'(a)$ est nul. On résout donc $f'(x) = 0$, avec $f'(x) = -6x^2 - 10x + 10$ (question B 1) a.) :

$$-6x^2 - 10x + 10 = 0 \iff 3x^2 + 5x - 5 = 0 \quad \text{(en divisant par } -2\text{)}.$$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-5) = 25 + 60 = 85 > 0$: deux solutions,

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{85}}{6} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{85}}{6}.$$

Tangentes horizontales aux points d'abscisses $\dfrac{-5 - \sqrt{85}}{6}$ et $\dfrac{-5 + \sqrt{85}}{6}$

Comparaison : $\sqrt{85} \approx 9{,}22$, donc $x_1 \approx -2{,}37$ et $x_2 \approx 0{,}70$, ce qui confirme la lecture graphique de la question A 5) ($x \approx -2{,}4$ et $x \approx 0{,}7$, abscisses du minimum local et du maximum local de la courbe).

Exercice 2

2 points

1) f est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

2) **a.** $f'(1) = 6 - 6 - 12$, donc $f'(1) = -12$.

b. $f'(1)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

3) **a.** $f'(x) = 6\left(x^2 - x - 2\right)$. Le trinôme $x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$ et pour racines $\dfrac{1-3}{2} = -1$ et $\dfrac{1+3}{2} = 2$; d'où $f'(x) = 6(x+1)(x-2)$, du signe de $6 > 0$ à l'extérieur des racines.

b. $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 1 = 8$ et $f(2) = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		↗	8	↘	-19	↗	

f est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$, décroissante sur $[-1\,;\,2]$ et croissante sur $[2\,;\,+\infty[$; maximum local 8 en -1, minimum local -19 en 2.

4) Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. La droite d a pour coefficient directeur -12. On résout donc $f'(x) = -12$:

$$6x^2 - 6x - 12 = -12 \iff 6x^2 - 6x = 0 \iff 6x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

- En $x = 0$: $f(0) = 1$, la tangente a pour équation $y = -12x + 1$: c'est la droite d elle-même (droites confondues, donc parallèles).
- En $x = 1$: $f(1) = 2 - 3 - 12 + 1 = -12$, la tangente a pour équation $y = -12(x-1) - 12$, soit $y = -12x$.

Oui : les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1 sont parallèles à d.

Exercice 3

3 points

1) Pour tout réel x, $x^2 + 5 \geqslant 5 > 0$: le dénominateur ne s'annule pas. La fonction $v : x \mapsto x^2 + 5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, donc $f = -2 \times \dfrac{1}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $v'(x) = 2x$ et :

$$f'(x) = -2 \times \left(-\frac{v'(x)}{v(x)^2}\right) = -2 \times \frac{-2x}{(x^2+5)^2} = \boxed{\frac{4x}{(x^2+5)^2}}$$

2) **a.** Le coefficient directeur cherché est $f'(1) = \dfrac{4}{(1+5)^2} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9} \neq \dfrac{1}{8}$.

Faux

b. Pour $x > 0$, $4x > 0$ et $\left(x^2+5\right)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$: f est strictement *croissante* sur $]0\,;+\infty[$.

Faux

c. $f'(0) = \dfrac{0}{25} = 0$: la tangente au point d'abscisse 0 a un coefficient directeur nul.

Vrai

d. $f(1) = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$ et $f'(1) = \dfrac{1}{9}$. La tangente T_1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$:

$$y = \frac{1}{9}(x-1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}x - \frac{1}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}.$$ Vrai

Exercice 4

5 points

1) Garder $90\,\%$ des abonnés revient à multiplier par $0{,}9$; on ajoute ensuite les 200 nouveaux abonnés :

$$u_1 = 0{,}9 \times 500 + 200 = 450 + 200 = \boxed{650} \qquad u_2 = 0{,}9 \times 650 + 200 = 585 + 200 = \boxed{785}$$

2) D'une année à la suivante, la chaîne garde $90\,\%$ des u_n abonnés, soit $0{,}9\,u_n$, et en gagne 200 :

$$\boxed{u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 200}$$

3) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2\,000 = 0{,}9\,u_n + 200 - 2\,000 = 0{,}9\,u_n - 1\,800 = 0{,}9\,(u_n - 2\,000) = 0{,}9\,v_n.$$

De plus $v_0 = u_0 - 2\,000 = 500 - 2\,000 = -1\,500$.

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0{,}9 \text{ et de premier terme } v_0 = -1\,500.}$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$, soit $\boxed{v_n = -1\,500 \times 0{,}9^n}$. Comme $u_n = v_n + 2\,000$:

$$\boxed{u_n = -1\,500 \times 0{,}9^n + 2\,000}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = -1\,500 \times 0{,}9^{n+1} + 1\,500 \times 0{,}9^n = 1\,500 \times 0{,}9^n\,(1 - 0{,}9) = 150 \times 0{,}9^n > 0.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

La chaîne peut se féliciter : son nombre d'abonnés augmente chaque année. On remarque toutefois que $u_n < 2\,000$ pour tout n (car $-1\,500 \times 0{,}9^n < 0$) : la progression ralentit et le nombre d'abonnés reste sous $2\,000$.

6) **a.** $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $0{,}9 \neq 1$:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{1 - 0{,}9^{n+1}}{1 - 0{,}9} = -1\,500 \times \frac{1 - 0{,}9^{n+1}}{0{,}1} = \boxed{-15\,000 \times \left(1 - 0{,}9^{n+1}\right)}$$

b. Les 10 premières années correspondent à $u_0, u_1, \ldots, u_9$. Comme $u_k = v_k + 2\,000$:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_9 = (v_0 + \cdots + v_9) + 10 \times 2\,000 = -15\,000 \times \left(1 - 0{,}9^{10}\right) + 20\,000 \approx 10\,230{,}18.$$

Chaque abonné rapporte 70 euros par an, donc la somme récoltée est :

$$70 \times \left(20\,000 - 15\,000 \times \left(1 - 0{,}9^{10}\right)\right) \approx \boxed{716\,112 \text{ euros}}$$

Remarque : le modèle donne des nombres d'abonnés non entiers à partir de $u_3 = 906{,}5$; le résultat est donc une estimation, arrondie à l'euro.

Exercice 5

3 points

1) **a.** $u_0 = 0$, $u_1 = 1 - 9 = -8$, $u_2 = 8 - 36 = -28$: $\boxed{u_0 = 0,\ u_1 = -8,\ u_2 = -28}$.

b. La suite (u_n) est décroissante si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Comme $u_0 > u_1 > u_2$, on conjecture que **la suite (u_n) est décroissante**.

2) **a.** f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 18x = 3x(x-6)}$. Sur $[0\,;+\infty[$, $3x \geqslant 0$; donc $f'(x)$ a le signe de $x - 6$: $f'(x) \leqslant 0$ sur $[0\,;6]$ (nul en 0 et 6), $f'(x) > 0$ sur $]6\,;+\infty[$.

b. $f(0) = 0$ et $f(6) = 216 - 324 = -108$.

x	0		6		$+\infty$
signe de $f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	0	↘	-108	↗	

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$. Comme f est décroissante sur $[0\,;6]$ et croissante sur $[6\,;+\infty[$:

$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante pour } 0 \leqslant n \leqslant 6, \text{ puis croissante à partir de } n = 6.}$

Par exemple $u_6 = -108$, $u_7 = 343 - 441 = -98 > u_6$.

3) La conjecture est **fausse** : la suite n'est pas décroissante, elle augmente à partir du rang 6. Les premiers termes ne suffisent pas pour conclure sur le sens de variation d'une suite.

Exercice 6

2 points

On rappelle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1) Si Mathis a lu les pages 1 à k, alors $1 + 2 + \cdots + k = 351$, soit :

$$\frac{k(k+1)}{2} = 351 \iff k^2 + k - 702 = 0.$$

$\Delta = 1 + 4 \times 702 = 2\,809 = 53^2$; les racines sont $\dfrac{-1-53}{2} = -27$ (exclue, $k > 0$) et $\dfrac{-1+53}{2} = 26$.

Mathis a lu jusqu'à la page 26 (il reprend à la page 27).

2) Le livre a N pages ; la somme de tous les numéros vaut $351 + 469 = 820$, donc :

$$\frac{N(N+1)}{2} = 820 \iff N^2 + N - 1\,640 = 0.$$

$\Delta = 1 + 4 \times 1\,640 = 6\,561 = 81^2$; la racine positive est $\dfrac{-1+81}{2} = 40$.

Le livre contient 40 pages.

Vérification : $27 + 28 + \cdots + 40 = \dfrac{14 \times (27+40)}{2} = 469$.

Bonus

hors barème

Soit $x > 0$ et $h \neq 0$ tel que $x + h > 0$. Le taux de variation de la fonction racine carrée entre x et $x + h$ est :

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

Quand h tend vers 0, $\sqrt{x+h}$ tend vers $\sqrt{x}$, donc le taux tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, qui est un nombre réel.

La fonction racine carrée est donc dérivable en tout $x > 0$, et :

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$