Calculatrice autorisée

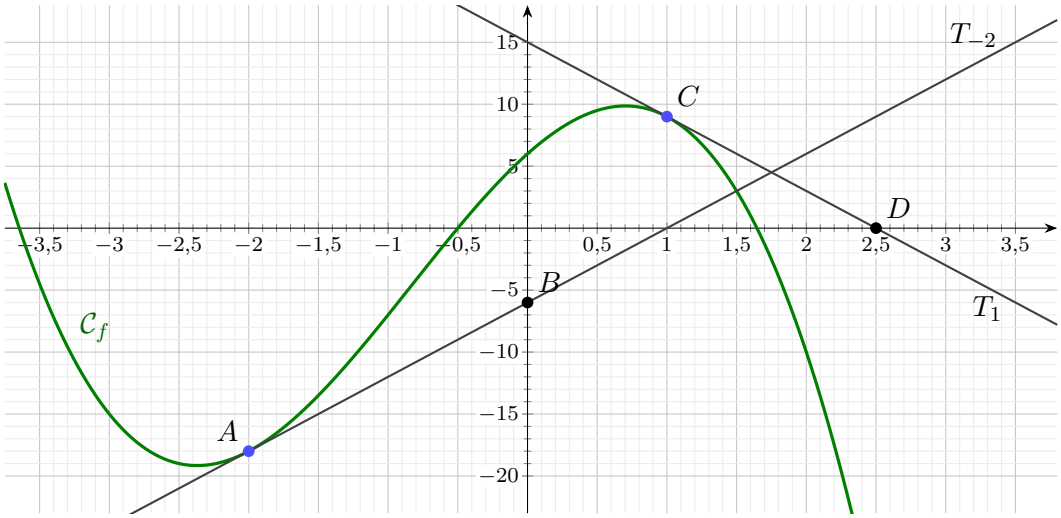
Les questions marquées ⋆ sont plus exigeantes.

Exercice 1

5 points

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes.

- T_1 est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 et passe par $C(1\,;\,9)$ et $D(2{,}5\,;\,0)$.
- T_{-2} est la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -2 et passe par $A(-2\,;\,-18)$ et $B(0\,;\,-6)$.



Partie A – Lecture graphique

1) La fonction f vous paraît-elle dérivable sur $[-2\,;\,2]$? Justifier brièvement.

2) **a.** Donner $f(-2)$ et $f(1)$.

b. Déterminer $f'(-2)$ et $f'(1)$. *(On justifiera avec soin au moins l'un des deux.)*

3) Que peut-on conjecturer concernant $f'(0)$?

4) **a.** Déterminer l'équation de T_{-2}.

b. Le point $E(1\,;\,0)$ appartient-il à T_{-2} ? Justifier la réponse par un calcul.

5) Résoudre graphiquement $f'(x) = 0$ puis $f'(x) > 0$. *(Pas de justification demandée.)*

Partie B – Partie algébrique

La fonction f de la partie précédente est en réalité définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 6$.

1) **a.** Démontrer que l'équation de la tangente T_0 à la courbe de f au point d'abscisse 0 est :

$$y = 10x + 6.$$

b. Tracer cette tangente T_0 dans le graphique précédent en justifiant le tracé par un tableau de valeurs.

2) ⋆ On admet que la fonction f est la dérivée d'une fonction F. Par lecture graphique, déterminer le sens de variation de F.

3) Déterminer les abscisses exactes des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est horizontale (on résoudra $f'(x) = 0$) et comparer avec la lecture graphique de la question A 5).

Exercice 2

2 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1) Calculer $f'(x)$.

2) **a.** Calculer $f'(1)$.

b. Que représente graphiquement ce nombre ?

3) **a.** Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.

b. En déduire le tableau de variation complet de f.

4) $\star$ Déterminer si $\mathcal{C}_f$ admet des tangentes parallèles à la droite d d'équation réduite $y = -12x + 1$.

Exercice 3

3 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 + 5}$.

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis que, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 5)^2}.$$

2) Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? **Justifier les réponses.**

a. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 vaut $\dfrac{1}{8}$.

b. f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

c. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est horizontale.

d. L'équation réduite de la tangente T_1 à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

$$y = \frac{1}{9}x - \frac{4}{9}.$$

Exercice 4

5 points

Lors de son ouverture, une chaîne de télévision locale comptait 500 abonnés. Chaque année, elle garde $90\,\%$ des abonnés de l'année précédente et en gagne 200 nouveaux. On note u_n le nombre d'abonnés de la chaîne n années après son ouverture ; ainsi $u_0 = 500$.

1) Calculer u_1 et u_2 en détaillant les calculs.

2) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 200$.

3) Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 2\,000$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = -1\,500 \times 0{,}9^n + 2\,000.$$

5) Étudier le sens de variation de la suite (u_n). La chaîne locale peut-elle se féliciter de ses résultats ?

6) **a.** $\star$ Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n = -15\,000 \times \left(1 - 0{,}9^{n+1}\right).$$

b. L'abonnement à la chaîne coûte 70 euros par an. Calculer la somme totale récoltée par la chaîne grâce aux abonnements pendant les 10 premières années (de $n = 0$ à $n = 9$).

Exercice 5

3 points

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^3 - 9n^2$.

1) **a.** Donner les trois premiers termes de la suite.

b. Rappeler la définition d'une suite décroissante puis émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite.

2) Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^3 - 9x^2$.

a. Déterminer la fonction dérivée f' de f puis étudier son signe sur $[0\,;+\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$.

c. En déduire le sens de variation de (u_n). Justifier.

3) Que penser de la conjecture faite à la question 1) ?

Exercice 6

2 points

⋆ Mathis est en train de lire un livre, qui commence à la page 1. En additionnant les numéros des pages qu'il a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros des pages qu'il lui reste à lire, il obtient 469.

1) À quelle page en est Mathis ?

2) Combien ce livre contient-il de pages ?

Bonus

hors barème

Démontrer que la fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On pourra utiliser un taux de variation.