Exercice 1

4,5 points

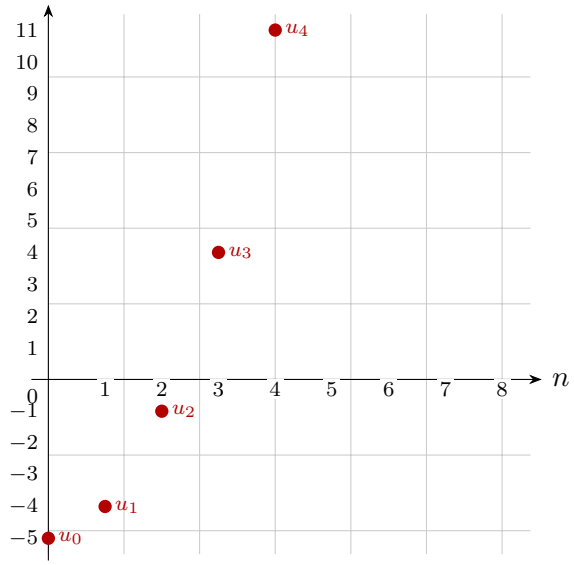
1) On applique la relation $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$ avec $n = 0, 1, 2, 3$:

$$u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 1 = -5 + 1 = -4, \qquad u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 1 = -4 + 3 = -1,$$

$$u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 1 = -1 + 5 = 4, \qquad u_4 = u_3 + 2 \times 3 + 1 = 4 + 7 = 11.$$

$$\boxed{u_0 = -5, \quad u_1 = -4, \quad u_2 = -1, \quad u_3 = 4, \quad u_4 = 11.}$$

2) On place les points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$:



3) **a.** Les points « montent » : $-5 < -4 < -1 < 4 < 11$. On conjecture que :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

b. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = 2n + 1.$$

Comme $n \geqslant 0$, on a $2n + 1 \geqslant 1 > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

4) À chaque passage dans la boucle, la variable `i` prend les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$ et on passe de u_i à $u_{i+1} = u_i + 2i + 1$; après n passages, `u` contient u_n.

```
def suite(n):
    u = -5
    for i in range(n):
        u = u + 2*i + 1
    return u
```

Exercice 2

10 points

1) Affirmation 1. On étudie le signe de la différence : pour tout réel x,

$$f(x) - g(x) = 5x^2 - 4x + 3 - x^2 - 8x + 6 = 4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2.$$

Un carré est positif ou nul : $f(x) - g(x) \geqslant 0$, soit $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout réel x. La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc *au-dessus* de $\mathscr{C}_g$ (les deux courbes se touchent au seul point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$). Par exemple, $f(0) = 3 > g(0) = -6$.

L'affirmation 1 est fausse.

2) Affirmation 2. (E) est une équation du second degré ($a = 1 \neq 0$, $b = m+3$, $c = m+1$) de discriminant

$$\Delta = (m+3)^2 - 4 \times 1 \times (m+1) = m^2 + 6m + 9 - 4m - 4 = m^2 + 2m + 5.$$

Or $m^2+2m+5 = (m+1)^2+4 \geqslant 4 > 0$ pour tout réel m. Le discriminant est toujours strictement positif, donc (E) admet toujours deux solutions distinctes.

L'affirmation 2 est vraie.

3) Affirmation 3. Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 - 3(n+1) + 4 - \left(-n^2 - 3n + 4\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 - 2n - 1 - 3n - 3 + 4 + n^2 + 3n - 4 = -2n - 4.$$

Comme $n \geqslant 0$, $-2n - 4 \leqslant -4 < 0$: $u_{n+1} < u_n$ pour tout n.

L'affirmation 3 est vraie.

4) Affirmation 4. On calcule les premiers termes :

$$v_1 = 2 \times 0^2 - 5 \times 0 + 2 = 2, \qquad v_2 = 2 \times 2^2 - 5 \times 2 + 2 = 8 - 10 + 2 = 0.$$

On a $v_2 < v_1$: la suite n'est pas croissante (un contre-exemple suffit). En fait, les termes valent alternativement 0 et 2.

L'affirmation 4 est fausse.

5) Affirmation 5. Augmenter de $5\,\%$ revient à multiplier par $1 + \dfrac{5}{100} = 1{,}05$. Donc $w_{n+1} = 1{,}05\, w_n$: (w_n) est géométrique de raison $1{,}05$ et de premier terme $w_0 = 54\,000$, d'où $w_n = 54\,000 \times 1{,}05^n$. À la calculatrice :

$$w_{12} = 54\,000 \times 1{,}05^{12} \approx 96\,976 < 100\,000 \qquad \text{et} \qquad w_{13} = 54\,000 \times 1{,}05^{13} \approx 101\,825 > 100\,000.$$

Comme la raison $1{,}05 > 1$ et $w_0 > 0$, la suite est croissante : le seuil est franchi pour la première fois pour $n = 13$, c'est-à-dire en $2025 + 13 = 2038$.

L'affirmation 5 est vraie.

Exercice 3

5,5 points

1) Entre le 1er juin et le 31 octobre 2020, 60 phoques arrivent : $1\,500 + 60 = 1\,560$. Puis la population baisse de $10\,\%$, c'est-à-dire qu'elle est multipliée par $1 - 0{,}1 = 0{,}9$:

$$u_1 = 0{,}9 \times 1\,560 = \boxed{1\,404.}$$

2) Au 1er juin de l'année $2020+n$, il y a u_n phoques. Au 31 octobre, il y en a u_n+60 ; au 1er juin suivant, il y en a $0{,}9 \times (u_n + 60)$. Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}9\,(u_n + 60) = 0{,}9\,u_n + 0{,}9 \times 60, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u_{n+1} = 0{,}9\,u_n + 54.}$$

3) À la calculatrice (mode suite ou tableur), on obtient par exemple $u_{10} \approx 874{,}7$, $u_{20} \approx 656{,}7$, $u_{40} \approx 554{,}2$: les termes diminuent et semblent se rapprocher de 540.

$$\boxed{\text{On conjecture que } \lim_{n\to+\infty} u_n = 540.}$$

4) **a.** La fonction calcule les termes successifs tant que $u_n \geqslant S$ et renvoie le premier rang n pour lequel $u_n < S$. Avec $S = 800$, elle renvoie 13 : $u_{13} < 800$ alors que les termes précédents sont supérieurs ou égaux à 800 ($u_{12} \approx 811{,}1$ et $u_{13} \approx 784{,}0$).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{C'est au 1er juin } 2020 + 13 = 2033 \text{ que la population}\\ \text{passera pour la première fois sous } 800 \text{ phoques.}\end{array}}$$

b. D'après la question précédente, la population passe sous la barre des 800 phoques au 1er juin 2033 (c'est aussi cohérent avec la conjecture : la limite 540 est inférieure à 800).

$$\boxed{\text{Oui : selon ce modèle, le parc perdra son label en 2033.}}$$

5) **a.** Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \left(960 \times 0{,}9^{n+1} + 540\right) - \left(960 \times 0{,}9^n + 540\right) = 960 \times 0{,}9^n \times 0{,}9 - 960 \times 0{,}9^n,$$

$$u_{n+1} - u_n = 960 \times 0{,}9^n \times (0{,}9 - 1) = 960 \times 0{,}9^n \times (-0{,}1),$$

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = -96 \times 0{,}9^n.}$$

b. Pour tout entier naturel n, $0{,}9^n > 0$, donc $-96 \times 0{,}9^n < 0$: $u_{n+1} - u_n < 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$