Exercice 1

6,5 points

1) On calcule $C(10)$:

$$C(10) = 10^3 - 60 \times 10^2 + 975 \times 10 = 1\,000 - 6\,000 + 9\,750 = 4\,750.$$

Le coût de production de 10 kg est de $4\,750$ €.

2) **a.** Chaque kilogramme est vendu 450 €, donc la recette pour 10 kg vaut $R(10) = 450 \times 10$, soit $4\,500$ €.

b. Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût :

$$4\,500 - 4\,750 = -250 \text{ €}$$

Pour 10 kg, le producteur perd 250 €.

3) Pour x kg, la recette est $R(x) = 450x$. Le bénéfice vaut donc, pour tout $x \in [0\,;\,45]$:

$$B(x) = R(x) - C(x) = 450x - \left(x^3 - 60x^2 + 975x\right) = -x^3 + 60x^2 + 450x - 975x,$$

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x.$$

4) B est une fonction polynôme, dérivable sur $[0\,;\,45]$:

$$B'(x) = -3x^2 + 120x - 525 = -3\left(x^2 - 40x + 175\right).$$

On étudie le signe du trinôme $x^2 - 40x + 175$: $\Delta = (-40)^2 - 4 \times 1 \times 175 = 1\,600 - 700 = 900 = 30^2 > 0$.

$$x_1 = \frac{40 - 30}{2} = 5 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{40 + 30}{2} = 35.$$

Donc $B'(x) = -3(x - 5)(x - 35)$. Le coefficient de x^2 dans $B'(x)$ est $-3 < 0$: $B'(x)$ est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

Images utiles :

$$B(0) = 0, \qquad B(5) = -125 + 1\,500 - 2\,625 = -1\,250,$$

$$B(35) = -42\,875 + 73\,500 - 18\,375 = 12\,250, \qquad B(45) = -91\,125 + 121\,500 - 23\,625 = 6\,750.$$

x	0		5		35		45
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de B	0	↘	$-1\,250$	↗	$12\,250$	↘	$6\,750$

5) D'après le tableau de variations, sur $[0\,;\,45]$ le maximum de B est le plus grand des deux « sommets » $B(0) = 0$ et $B(35) = 12\,250$; c'est donc $B(35)$.

Le bénéfice est maximal pour une production de 35 kg ; il vaut alors $12\,250$ €.

Exercice 2

5 points

1) Affirmation 1. Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f = uv$ avec $u(x) = 2x - 24$, $u'(x) = 2$, et $v(x) = \sqrt{x}$, $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (v est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$). Ainsi :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{2x-24}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{2x-24}{2\sqrt{x}},$$

$$f'(x) = \frac{4x + 2x - 24}{2\sqrt{x}} = \frac{6x-24}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-12}{\sqrt{x}}.$$

L'affirmation 1 est vraie.

Affirmation 2. Pour $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $3x - 12$: $f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,4[$, $f'(4) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]4\,;\,+\infty[$. La fonction f est décroissante sur $]0\,;\,4]$ puis croissante sur $[4\,;\,+\infty[$: elle admet un minimum en $x = 4$, qui vaut

$$f(4) = (2\times 4 - 24)\sqrt{4} = -16 \times 2 = -32.$$

x	0		4		$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f	0	↘	-32	↗	

Le minimum est atteint *en* 4, mais il *vaut* -32, et non 4.

L'affirmation 2 est fausse.

2) Affirmation 3. On lit sur $\mathscr{C}_g$ que g est croissante sur $]-\infty\,;\,-2]$, décroissante sur $[-2\,;\,1]$ et croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, avec des tangentes horizontales en -2 et en 1. On en déduit que $g'(x) \geqslant 0$ sur $]-\infty\,;\,-2]$, $g'(x) \leqslant 0$ sur $[-2\,;\,1]$, $g'(x) \geqslant 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$, et $g'(-2) = g'(1) = 0$.
La courbe Γ est au-dessus de l'axe des abscisses sur $]-\infty\,;\,-2]$ et sur $[1\,;\,+\infty[$, en dessous sur $[-2\,;\,1]$, et coupe l'axe en -2 et en 1 : le signe correspond.
Contrôle supplémentaire : la tangente à $\mathscr{C}_g$ en O passe par les points $(0\,;\,0)$ et environ $(1\,;\,-4)$, donc $g'(0) \approx -4$; on lit bien sur Γ l'ordonnée -4 en $x = 0$.

L'affirmation 3 est vraie.

Exercice 3

5,5 points

Partie A

1) g est une fonction polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = 3x^2 + 6$. Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$, donc $3x^2 + 6 \geqslant 6 > 0$.

$$g'(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ donc } \boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

2) $g(1) = 1 + 6 - 7 = \boxed{0}$.
g étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$: si $x < 1$, alors $g(x) < g(1) = 0$; si $x > 1$, alors $g(x) > g(1) = 0$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

$$\boxed{g(x) < 0 \text{ sur }]-\infty\,;\,1[, \quad g(1) = 0, \quad g(x) > 0 \text{ sur }]1\,;\,+\infty[.}$$

Partie B

1) f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x :

$$f'(x) = -2 \times 5x^4 - 20 \times 3x^2 + 35 \times 2x = -10x^4 - 60x^2 + 70x.$$

Par ailleurs, pour tout réel x :

$$-10x \times g(x) = -10x\left(x^3 + 6x - 7\right) = -10x^4 - 60x^2 + 70x. \qquad \text{Donc} \quad \boxed{f'(x) = -10x \times g(x).}$$

2) On dresse le tableau de signes du produit $-10x \times g(x)$ (le facteur $-10x$ s'annule en 0, il est positif pour $x < 0$ et négatif pour $x > 0$) :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = -2 - 20 + 35 = 13.$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
signe de $-10x$		$+$	0	$-$		$-$	
signe de $g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	13	$\searrow$	

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur }]-\infty\,;\,0], \text{ croissante sur } [0\,;\,1] \text{ et décroissante sur } [1\,;\,+\infty[.}$$

3) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x a pour coefficient directeur $f'(x)$; elle est parallèle à Δ si et seulement si $f'(x) = 2$ (coefficient directeur de Δ).
Or, d'après le tableau de signes, pour tout $x > 1$, $f'(x) < 0$, donc $f'(x) \neq 2$.

Non : aucun point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x > 1$ n'a une tangente parallèle à Δ.

Exercice 4

3 points

Lectures graphiques.

- $A(1\,;\,-4)$ est sur C, donc $u(1) = -4$; $u'(1)$ est le coefficient directeur de T. La droite T passe par $A(1\,;\,-4)$ et par $(3\,;\,0)$: $u'(1) = \dfrac{0-(-4)}{3-1} = 2$.
- D passe par $(0\,;\,2)$ et $(2\,;\,0)$: $v'(x) = \dfrac{0-2}{2-0} = -1$ et $v(x) = -x + 2$, d'où $v(1) = 1$ et $v'(1) = -1$. (On retrouve que $v(2) = 0$, d'où l'ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.)

Calcul. $f = \dfrac{u}{v}$ est dérivable en 1 car $v(1) \neq 0$, et

$$f'(1) = \frac{u'(1)v(1) - u(1)v'(1)}{(v(1))^2} = \frac{2 \times 1 - (-4) \times (-1)}{1^2} = \frac{2-4}{1} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{f'(1) = -2.}$$

Exercice bonus

hors barème

La tangente à la courbe de f au point d'abscisse a passe par le point de la courbe $(a\,;\,f(a))$. Son ordonnée en $x = a$ est donc $f(a)$. Pour tout réel a :

$$f(a) = (3a^2 - 3) \times a - 2a^3 - 1 = 3a^3 - 3a - 2a^3 - 1 = a^3 - 3a - 1.$$

On en déduit, pour tout réel x :

$$\boxed{f(x) = x^3 - 3x - 1.}$$

Vérifications : $f(0) = -1$, donc la courbe passe bien par $(0\,;\,-1)$. De plus $f'(x) = 3x^2 - 3$ et la tangente au point d'abscisse a a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = (3a^2-3)x - 3a^3 + 3a + a^3 - 3a - 1 = (3a^2-3)x - 2a^3 - 1,$$

ce qui est bien l'équation donnée.