Calculatrice autorisée

Exercice 1

6,5 points

Dans le Périgord, un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kg de ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par x le nombre de kilogrammes de truffes traités chaque semaine. Le coût total de production de x kg de truffes conditionnées, en euros, est donné par :

$$C(x) = x^3 - 60x^2 + 975x \quad \text{pour } x \in [0\,;\,45].$$

Chaque kilogramme de truffe conditionné est vendu 450 €.

1) Quel est le coût pour une production de 10 kg ?

2) **a.** Quelle est la recette pour une production de 10 kg ?

b. Quel est alors le bénéfice réalisé pour cette production de 10 kg ?

3) Démontrer que le bénéfice réalisé pour x kg de truffes conditionnées et vendues vaut :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x \quad \text{pour } x \in [0\,;\,45].$$

4) Calculer $B'(x)$, puis en déduire le tableau de variations de la fonction B sur $[0\,;\,45]$.

5) Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ? Que vaut ce bénéfice maximal ?

Exercice 2

5 points

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Les réponses doivent être soigneusement justifiées.

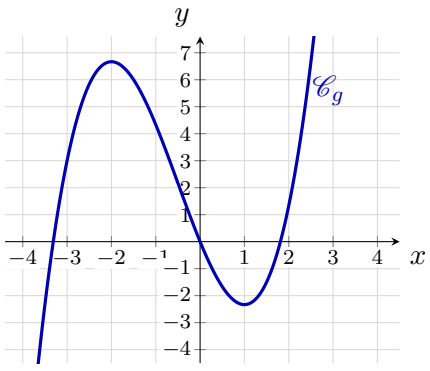
1) f est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = (2x - 24)\sqrt{x}$.

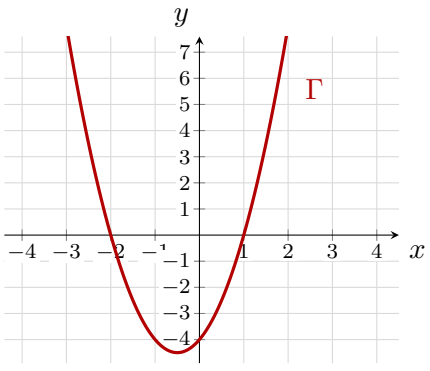
Affirmation 1 : la fonction dérivée de f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$, est donnée par $f'(x) = \dfrac{3x - 12}{\sqrt{x}}$.

Affirmation 2 : le minimum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ est 4.

2) On donne ci-dessous, à gauche, la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 3 : la courbe Γ ci-dessous, à droite, peut représenter la fonction dérivée g'.





Exercice 3

5,5 points

Partie A

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^3 + 6x - 7$.

1) Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $g(1)$, puis dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -2x^5 - 20x^3 + 35x^2$; on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Expliquer pourquoi f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis vérifier que, pour tout réel x, $f'(x) = -10x \times g(x)$.

2) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$, résumées dans un tableau.

3) Existe-t-il des points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse strictement supérieure à 1 en lesquels la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ d'équation $y = 2x - 5$? Justifier.

Exercice 4

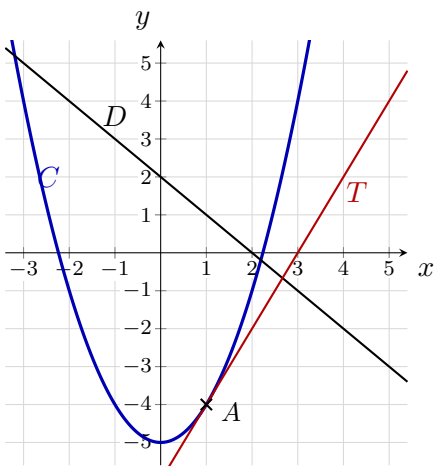
3 points

Dans le repère ci-contre, on a construit :

- la courbe C d'une fonction u ;
- la droite D, représentation graphique d'une fonction affine v ;
- la tangente T à C en son point A d'abscisse 1.

On définit la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

À l'aide du graphique, calculer $f'(1)$.



Exercice bonus

hors barème

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe passe par le point de coordonnées $(0\,;\,-1)$ et admet, en tout réel a, une tangente d'équation $y = (3a^2 - 3)x - 2a^3 - 1$.

Déterminer l'expression de $f(x)$.