Exercice 1

7 points

1) On regroupe les termes en x :

$$\begin{aligned} x\sqrt{5}+16=4\left(x+\sqrt{5}\right) &\iff x\sqrt{5}-4x=4\sqrt{5}-16 \\ &\iff x\left(\sqrt{5}-4\right)=4\left(\sqrt{5}-4\right) \\ &\iff x=4 \qquad \text{car } \sqrt{5}-4\neq 0. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{S}=\{4\}}$$

2) $x^2-x+1=0$: $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times 1=-3<0$. L'équation n'a pas de solution réelle :

$$\boxed{\mathcal{S}=\varnothing}$$

3) $x^2+\dfrac{1}{2}=x\sqrt{2} \iff x^2-\sqrt{2}\,x+\dfrac{1}{2}=0$.

$\Delta=\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times\dfrac{1}{2}=2-2=0$: une seule solution, $x_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(On reconnaît aussi $x^2-\sqrt{2}\,x+\dfrac{1}{2}=\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.)

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$$

4) On factorise par x, puis on reconnaît une identité remarquable :

$$x^3+2x^2+x=0 \iff x\left(x^2+2x+1\right)=0 \iff x(x+1)^2=0 \iff x=0 \text{ ou } x+1=0$$

(un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul).

$$\boxed{\mathcal{S}=\{-1\,;0\}}$$

5) L'équation n'a de sens que si $x+1\neq 0$: on la résout sur $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{-1\}}$. Pour $x\neq -1$, on multiplie par $x+1\neq 0$:

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x+1}=3 &\iff x(x+1)+1=3(x+1) \\ &\iff x^2+x+1=3x+3 \\ &\iff x^2-2x-2=0. \end{aligned}$$

$\Delta=(-2)^2-4\times 1\times(-2)=12>0$ et $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$: deux solutions

$$x_1=\frac{2-2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2=1+\sqrt{3},$$

toutes deux différentes de -1.

$$\boxed{\mathcal{S}=\left\{1-\sqrt{3}\,;1+\sqrt{3}\right\}}$$

Exercice 2

8 points

1) **a.** $f(2) = 2 \times 4 - 2 - 6 = 0$: $\boxed{2 \text{ est une racine de } f}$.

b. Le produit des racines d'un trinôme $ax^2 + bx + c$ vaut $\frac{c}{a}$, ici $\frac{-6}{2} = -3$. En notant x_2 l'autre racine : $2x_2 = -3$, donc $\boxed{x_2 = -\frac{3}{2}}$.

(Contrôle avec la somme : $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = -\frac{b}{a}$.)

c. $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, soit

$$\boxed{f(x) = 2(x-2)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x-2)(2x+3)}.$$

2) **a.** On factorise par -2 puis on complète le carré :

$$g(x) = -2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) - 5 = -2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] - 5$$
$$= -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{49}{8} - \frac{40}{8},$$

$$\boxed{g(x) = -2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}.$$

b. $a = -2 < 0$: g est croissante puis décroissante, avec un maximum $\frac{9}{8}$ atteint en $\frac{7}{4}$.

x	$-\infty$	$\frac{7}{4}$	$+\infty$
$g(x)$	↗	$\frac{9}{8}$	↘

3) **a.** On factorise par 4 puis on complète le carré :

$$h(x) = 4\left(x^2 - 3x\right) + 9 = 4\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 9 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 9 + 9,$$

$$\boxed{h(x) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}.$$

(On reconnaît d'ailleurs $h(x) = (2x-3)^2$.)

b. $a = 4 > 0$: h est décroissante puis croissante, avec un minimum 0 atteint en $\frac{3}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$h(x)$	↘	0	↗

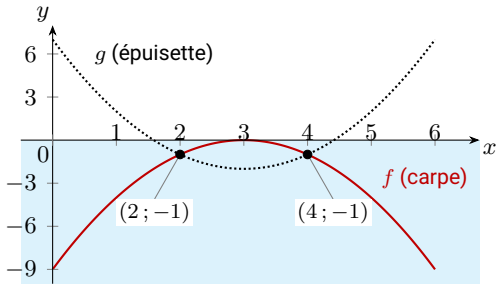
Exercice 3

2 points

L'épuisette rencontre la carpe en un point commun aux deux courbes, c'est-à-dire pour une abscisse x telle que $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff -x^2 + 6x - 9 = x^2 - 6x + 7 \\ &\iff -2x^2 + 12x - 16 = 0 \\ &\iff x^2 - 6x + 8 = 0 \qquad \text{on divise par } -2. \end{aligned}$$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 > 0$: deux solutions, $x_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{6+2}{2} = 4$, toutes deux dans $[0\,;6]$.
Points de rencontre : $f(2) = -4 + 12 - 9 = -1$ et $f(4) = -16 + 24 - 9 = -1$ (on vérifie $g(2) = g(4) = -1$), soit $(2\,;-1)$ et $(4\,;-1)$, sous la surface de l'eau.



Oui, l'épuisette peut rencontrer la carpe, à deux endroits : aux points $(2\,;-1)$ et $(4\,;-1)$.

Exercice 4

3 points

Soit n un entier naturel. Les entiers n et $n+1$ conviennent si et seulement si

$$\begin{aligned} n^2 + (n+1)^2 = 3\,613 &\iff n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3\,613 \\ &\iff 2n^2 + 2n - 3\,612 = 0 \\ &\iff n^2 + n - 1\,806 = 0 \qquad \text{on divise par } 2. \end{aligned}$$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1\,806) = 1 + 7\,224 = 7\,225 = 85^2$ (indication de l'énoncé). Deux solutions réelles :

$$n_1 = \frac{-1-85}{2} = -43 \qquad \text{et} \qquad n_2 = \frac{-1+85}{2} = 42.$$

(Sans diviser par 2 : $\Delta = 2^2 + 8 \times 3\,612 = 28\,900 = 170^2$, et $n = \dfrac{-2 \pm 170}{4}$, mêmes valeurs.)
-43 n'est pas un entier naturel ; $n = 42$ convient. Vérification : $42^2 + 43^2 = 1\,764 + 1\,849 = 3\,613$.

Oui : les entiers 42 et 43.