Exercice 1

2 points

1) Pour tout entier naturel n :

$$u_n > 1\,000 \iff 3\sqrt{n} - 2 > 1\,000 \iff 3\sqrt{n} > 1\,002 \iff \sqrt{n} > 334 \iff n > 334^2,$$

la dernière équivalence venant de ce que la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ (les deux membres sont positifs).
Or $334^2 = 111\,556$. On a donc $u_n > 1\,000$ à partir du rang $\boxed{n = 111\,557}$ (on remarque que $u_{111\,556} = 3 \times 334 - 2 = 1\,000$ exactement).

2) Soit A un réel positif. De même, pour tout entier naturel n :

$$u_n > A \iff 3\sqrt{n} > A + 2 \iff \sqrt{n} > \frac{A+2}{3} \iff n > \left(\frac{A+2}{3}\right)^2,$$

car $\dfrac{A+2}{3} > 0$ et la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc, en notant N le premier entier strictement supérieur à $\left(\dfrac{A+2}{3}\right)^2$, on a :

$$\boxed{u_n > A \text{ pour tout } n \geqslant N}.$$

3) Tout intervalle $]A\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang : c'est la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

La suite (u_n) est donc divergente.

Exercice 2

3,5 points

1) Les suites des questions **a.** et **b.** sont définies pour $n \geqslant 1$.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$; et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3n) = -\infty$.
Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

b. On développe : $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n} - \dfrac{4}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{4}{n}$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = 0$, donc par différence $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.
(Le produit direct $\dfrac{1}{n} \times (\sqrt{n} - 4)$ donne une forme indéterminée « $0 \times \infty$ », d'où le développement.)

c. Le quotient des limites donne une forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ». Pour $n \geqslant 1$, on factorise par

n^3 :

$$u_n = \frac{n^3\left(4+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(3-\dfrac{1}{n^3}\right)} = \frac{4+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n^3}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^3} = 0$, par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{4}{3}}$.

2) **a.** **Affirmation 1 : Vrai.** Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ (deux réels), alors, d'après le théorème sur la limite d'une somme, $\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$, qui est un réel : la suite $(u_n + v_n)$ converge.

b. **Affirmation 2 : Faux.** Contre-exemple : $u_n = n$ et $v_n = -n$.
Pour tout n, $u_n + v_n = 0$, donc $(u_n + v_n)$ converge vers 0 ; mais $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$: aucune des deux suites ne converge.

Exercice 3

7,5 points

1) **a.** Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $0 < v_n < 4$ ».
Initialisation. $v_0 = 1$ et $0 < 1 < 4$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit n un entier naturel tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
0 < v_n < 4 &\iff -4 < -v_n < 0 && \text{on multiplie par } -1\\
&\iff 4 < 8 - v_n < 8 && \text{on ajoute } 8\\
&\iff \frac{1}{8} < \frac{1}{8-v_n} < \frac{1}{4} && \text{la fonction inverse est décroissante sur }]0\,;+\infty[\\
&\iff 2 < \frac{16}{8-v_n} < 4 && \text{on multiplie par } 16 > 0\\
&\implies 0 < v_{n+1} < 4 && \text{car } 2 > 0.
\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{0 < v_n < 4}$.

b. Pour tout entier naturel n (on a $8 - v_n \neq 0$ car $v_n < 4$) :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{16}{8-v_n} - v_n = \frac{16 - v_n(8-v_n)}{8-v_n} = \frac{v_n^2 - 8v_n + 16}{8-v_n} = \boxed{\frac{(4-v_n)^2}{8-v_n}}.$$

c. Pour tout entier naturel n, $(4-v_n)^2 > 0$ (car $v_n \neq 4$) et $8 - v_n > 0$ (car $v_n < 4$). Donc $v_{n+1} - v_n > 0$:

$\boxed{\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante}}$, donc monotone.

2) w_n est bien défini pour tout n puisque $v_n \neq 4$.

a. Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = \frac{1}{v_{n+1}-4} = \frac{1}{\dfrac{16}{8-v_n}-4} = \frac{1}{\dfrac{16-32+4v_n}{8-v_n}} = \frac{8-v_n}{4(v_n-4)}.$$

Donc

$$w_{n+1} - w_n = \frac{8-v_n}{4(v_n-4)} - \frac{4}{4(v_n-4)} = \frac{4-v_n}{4(v_n-4)} = -\frac{1}{4}.$$

La suite (w_n) est $\boxed{\text{arithmétique de raison } r = -\frac{1}{4}}$, de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{v_0-4} = \dfrac{1}{1-4}$, soit $\boxed{w_0 = -\frac{1}{3}}$.

b. Pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 + nr = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{n}{4} = -\dfrac{3n+4}{12}$; ce nombre n'est pas nul.

De $w_n = \dfrac{1}{v_n-4}$ on tire $v_n - 4 = \dfrac{1}{w_n} = -\dfrac{12}{3n+4}$, d'où

$$\boxed{v_n = 4 - \frac{12}{3n+4}}.$$

Vérification : $v_0 = 4-3 = 1$ et $v_1 = 4 - \dfrac{12}{7} = \dfrac{16}{7} = \dfrac{16}{8-1}$.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+4) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{12}{3n+4} = 0$, et par différence $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4}$.

3) a. On répète le calcul du terme suivant tant que la condition n'est pas atteinte, c'est-à-dire tant que $4 - v \geqslant 10^{-p}$:

```
1  def seuil(p):
2      v = 1
3      n = 0
4      while 4 - v >= 10**(-p):
5          n = n + 1
6          v = 16/(8-v)
7      return(n)
```

b. Avec $p = 1$, la fonction renvoie le plus petit entier n tel que $4 - v_n < 10^{-1}$. D'après 2)b., $4 - v_n = \dfrac{12}{3n+4}$, donc, comme $3n+4 > 0$:

$$4 - v_n < \frac{1}{10} \iff \frac{12}{3n+4} < \frac{1}{10} \iff 120 < 3n+4 \iff n > \frac{116}{3} \approx 38{,}67.$$

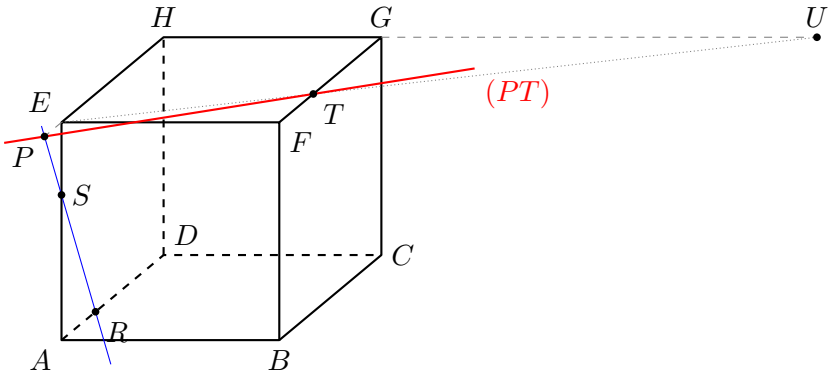
Le plus petit entier qui convient est 39 (contrôle : $4 - v_{38} = \dfrac{6}{59} \approx 0{,}102$ et $4 - v_{39} = \dfrac{12}{121} \approx 0{,}099$).

`seuil(1)` renvoie $\boxed{39}$.

Exercice 4

7 points

Partie A



1) **a.** $\overrightarrow{HU} = 3\overrightarrow{HG}$: U est sur la demi-droite $[HG)$, au-delà de G, avec $GU = 2HG$; on reporte deux fois la longueur de l'arête après G (figure).

b. D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{ET} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FT} = \overrightarrow{EF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}.$$

Dans le cube, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$. Donc

$$\overrightarrow{EU} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HU} = \overrightarrow{FG} + 3\overrightarrow{EF} = 3\left(\overrightarrow{EF} + \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}\right) = 3\overrightarrow{ET}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{EU}$ et $\overrightarrow{ET}$ sont colinéaires : les points E, T et U sont alignés.

2) On se place dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$: $R\left(0\,;\frac{1}{3}\,;0\right)$, $S\left(0\,;0\,;\frac{2}{3}\right)$, $E(0\,;0\,;1)$, $H(0\,;1\,;1)$.

a. $R \in [AD]$ et $S \in [AE]$, donc la droite (RS) est contenue dans le plan (ADE), qui contient aussi la droite (EH) : les deux droites sont **coplanaires**.
$\overrightarrow{RS}\left(0\,;-\frac{1}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ et $\overrightarrow{EH}(0\,;1\,;0)$ ne sont pas colinéaires (la troisième coordonnée de $\overrightarrow{EH}$ est nulle, pas celle de $\overrightarrow{RS}$) : les droites ne sont **pas parallèles**.
Deux droites coplanaires non parallèles sont sécantes : (RS) et (EH) sont sécantes.
Recherche de P : un point de (RS) s'écrit $\left(0\,;\frac{1}{3} - \frac{t}{3}\,;\frac{2t}{3}\right)$ avec $t \in \mathbb{R}$; il est sur (EH) si sa cote vaut 1, soit $t = \frac{3}{2}$. D'où

$$P\left(0\,;-\frac{1}{6}\,;1\right), \qquad \overrightarrow{EP} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{EH}.$$

Sur la figure, P est sur la droite (EH), du côté de E opposé à H : on prolonge (RS) au-delà de S et (HE) au-delà de E.

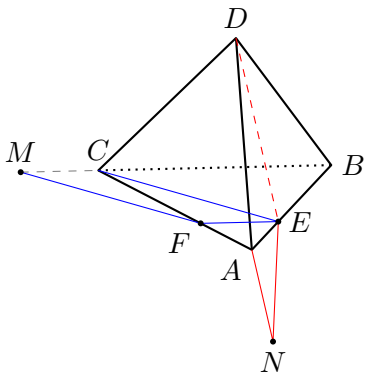
b. $P \in (RS) \subset (RST)$ et $P \in (EH) \subset (EFG)$: P appartient aux deux plans.

$T \in (RST)$ et $T \in [FG] \subset (EFG)$: T appartient aux deux plans.
Les plans (RST) et (EFG) ne sont pas confondus (R n'est pas dans la face supérieure) et ils ont deux points communs distincts P et T : leur intersection est une droite, et

$$\boxed{(RST) \cap (EFG) = (PT)}.$$

On trace la droite (PT) dans le plan de la face $EFGH$ (en rouge sur la figure).

Partie B



1) E et F sont aux tiers de $[AB]$ et de $[AC]$ en partant de A ; M est sur la droite (BC), du côté de C opposé à B, avec $CM = \frac{1}{3}CB$; N s'obtient en reportant à partir de A la moitié du vecteur $\overrightarrow{DE}$ (figure).

2) **Quadrilatère** $MCEF$**.** D'après la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Par ailleurs $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Ainsi $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CM}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{FE}$: comme E n'est pas sur la droite (BC), $MCEF$ est un $\boxed{\text{parallélogramme}}$.

Quadrilatère $ADEN$**.** $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$, donc $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$: les côtés opposés $[DE]$ et $[NA]$ sont parallèles, et $NA = \frac{1}{2}DE \neq DE$. Comme A, D, E ne sont pas alignés (D n'est pas dans le plan (ABC)), $ADEN$ est un $\boxed{\text{trapèze}}$ de bases $[DE]$ et $[AN]$ (et non un parallélogramme, ses bases n'ayant pas la même longueur).

3) $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$, donc $2\overrightarrow{DN} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE}$.
$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, donc $3\overrightarrow{DF} = 3\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$. D'où

$$2\overrightarrow{DN} - 3\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \boxed{\overrightarrow{CE}}.$$

4) Les vecteurs $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DF}$ ne sont pas colinéaires (N est dans le plan (ABD) hors de la droite (AD), F n'est pas dans ce plan), ils dirigent donc le plan (DNF).
D'après 3), $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{DN} - 3\overrightarrow{DF}$ est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs : il est un vecteur du plan (DNF). Donc la droite (CE) est $\boxed{\text{parallèle au plan } (DNF)}$.