Calculatrice autorisée

Exercice 1

2 points

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3\sqrt{n} - 2$.

1) À partir de quel rang a-t-on $u_n > 1\,000$?

2) Soit A un réel positif. Montrer qu'à partir d'un certain rang (que l'on précisera), on a $u_n > A$.

3) Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ? Justifier.

Exercice 2

3,5 points

Les deux questions sont indépendantes.

1) Dans chaque cas, et en expliquant la réponse, déterminer la limite de la suite (u_n) :

a) $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}} - 3n$ b) $u_n = \dfrac{1}{n}(\sqrt{n} - 4)$ c) $u_n = \dfrac{4n^3 + n}{3n^3 - 1}$

2) Répondre par Vrai ou Faux aux affirmations suivantes, en justifiant la réponse (*une réponse non justifiée ne rapporte aucun point*).

a. Affirmation 1 : si (u_n) et (v_n) convergent, alors $(u_n + v_n)$ converge.

b. Affirmation 2 : si $(u_n + v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 3

7,5 points

On considère la suite (v_n) à valeurs réelles définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = \frac{16}{8 - v_n}.$$

1) **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 < v_n < 4$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(4 - v_n)^2}{8 - v_n}.$$

c. La suite (v_n) est-elle monotone ? Justifier.

2) On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 4}$.

a. Démontrer que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{4}$. Préciser son premier terme.

b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

c. Déterminer alors la limite de la suite (v_n).

3) **a.** Recopier et compléter le script ci-dessous, écrit en langage Python, afin qu'il renvoie la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle $4 - v_n < 10^{-p}$, où p est un nombre entier strictement positif.

```
def seuil(p):
    v = 1
    n = 0
    while ..... :
        n = .....
        v = 16/(8-v)
    return(.....)
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit `seuil(1)` dans la console Python. Justifier la réponse.

Exercice 4

7 points

Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, ainsi que les points R, S et T tels que :

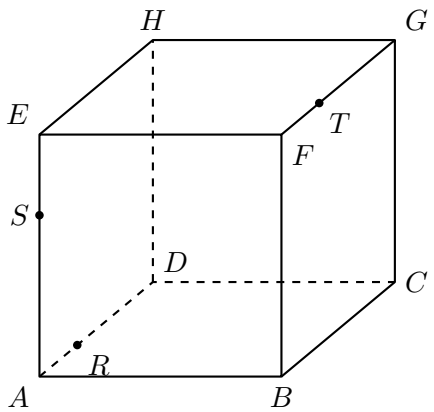
$$\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \qquad \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}, \qquad \overrightarrow{FT} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}.$$

1) **a.** Placer sur la figure le point U défini par $\overrightarrow{HU} = 3\overrightarrow{HG}$.

b. Démontrer que les points E, T et U appartiennent à une même droite.

2) **a.** Justifier que les droites (RS) et (EH) se coupent en un point, que l'on note P, puis placer P sur la figure en laissant visibles les traits de construction.

b. Déterminer, en justifiant, la droite d'intersection des plans (RST) et (EFG), puis la tracer sur la figure.



Partie B

On considère un tétraèdre $ABCD$ et les points E, F, M et N définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{CM} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}, \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}.$$

1) Construire ces quatre points sur la figure ci-dessous.

2) Quelle est la nature du quadrilatère $MCEF$? Et celle du quadrilatère $ADEN$? Justifier.

3) Établir l'égalité $2\overrightarrow{DN} - 3\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE}$.

4) Que peut-on en conclure pour la droite (CE) et le plan (DNF) ?

