Exercice 1

5,5 points

1) **a.** On répète 185 fois, de façon indépendante, l'épreuve de Bernoulli « choisir une diode », dont le succès « la diode est défectueuse » a pour probabilité $0{,}017$. X compte le nombre de succès, donc

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(185\,;0{,}017)}$$

et, pour tout $k \in \{0\,;1\,;\ldots\,;185\}$, $P(X=k) = \binom{185}{k} 0{,}017^k\, 0{,}983^{185-k}$.

b. $E(X) = np = 185 \times 0{,}017$, soit $\boxed{E(X) = 3{,}145}$.
En moyenne, sur un grand nombre de boîtes, une boîte contient environ $3{,}145$ diodes défectueuses.

c. $V(X) = np(1-p) = 185 \times 0{,}017 \times 0{,}983 = 3{,}091\,535$, donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, soit $\boxed{\sigma(X) \approx 1{,}7583}$.

2) **a.** $P(X = 4) = \binom{185}{4} \times 0{,}017^4 \times 0{,}983^{181} = 47\,239\,010 \times 0{,}017^4 \times 0{,}983^{181}$, soit $\boxed{P(X=4) \approx 0{,}1771}$.

b. $P(X=0) = 0{,}983^{185}$, soit $\boxed{P(X=0) \approx 0{,}0419}$.

c. À la calculatrice : $\boxed{P(X \leqslant 6) \approx 0{,}9601}$.

d. « Plus de 3 » signifie $X > 3$, c'est-à-dire $X \geqslant 4$:

$$P(X>3) = 1 - P(X \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}6145, \qquad \boxed{P(X>3) \approx 0{,}3855}.$$

e. $P(2 \leqslant X < 5) = P(2 \leqslant X \leqslant 4) = P(X \leqslant 4) - P(X \leqslant 1) \approx 0{,}7916 - 0{,}1760$, soit $\boxed{P(2 \leqslant X < 5) \approx 0{,}6156}$.

f. On cherche $P_{X \geqslant 4}(X < 8)$:

$$P_{X\geqslant 4}(X<8) = \frac{P(4 \leqslant X \leqslant 7)}{P(X \geqslant 4)} = \frac{P(X \leqslant 7) - P(X \leqslant 3)}{1 - P(X \leqslant 3)}, \qquad \boxed{P_{X\geqslant 4}(X<8) \approx 0{,}9624}.$$

g. On cherche $P_{X<9}(X > 5)$:

$$P_{X<9}(X>5) = \frac{P(6 \leqslant X \leqslant 8)}{P(X \leqslant 8)} = \frac{P(X \leqslant 8) - P(X \leqslant 5)}{P(X \leqslant 8)}, \qquad \boxed{P_{X<9}(X>5) \approx 0{,}0932}.$$

3) Une boîte est qualifiée avec la probabilité $q = P(X \leqslant 4) \approx 0{,}7916$.
Soit Y le nombre de boîtes qualifiées dans un carton. Les 10 boîtes jouent le rôle de 10 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (pour la même raison qu'en 1)a.), de succès « la boîte est qualifiée », de probabilité q : $Y \sim \mathcal{B}(10\,;q)$.

$$P(Y \geqslant 9) = P(Y=9) + P(Y=10) = 10\,q^9(1-q) + q^{10}, \qquad \boxed{P(Y \geqslant 9) \approx 0{,}3511}.$$

Exercice 2

2,5 points

1) Avec $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{na}$, $\mathrm{e}^a\mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$:

$$A = \mathrm{e}^{5\left(\frac{x}{3}-2\right)+(1-2x)-\left(1-\frac{2x}{3}\right)} = \mathrm{e}^{\frac{5x}{3}-10+1-2x-1+\frac{2x}{3}}, \qquad \boxed{A = \mathrm{e}^{\frac{x}{3}-10}}.$$

2) Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, donc

$$\mathrm{e}^x - 2 + \mathrm{e}^{-x} = \frac{(\mathrm{e}^x)^2 - 2\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x} = \boxed{\frac{(\mathrm{e}^x - 1)^2}{\mathrm{e}^x}} \quad \text{(identité remarquable).}$$

3)

- $\sqrt{\mathrm{e}^{1-2x}} = \left(\mathrm{e}^{1-2x}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{1-2x}{2}}$. La fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$\mathrm{e}^{\frac{1-2x}{2}} = \mathrm{e}^{2-3x} \iff \frac{1-2x}{2} = 2-3x \iff 1-2x = 4-6x \iff 4x = 3 \iff x = \frac{3}{4}.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{3}{4}\right\}}$$

- $\mathrm{e}^{2x-1} = 4 \iff 2x - 1 = \ln 4 \iff x = \dfrac{1+\ln 4}{2} = \dfrac{1}{2} + \ln 2.$ $\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2} + \ln 2\right\}}$

  ($\approx 1{,}19$).

- $\mathrm{e}^{x^2+1} > 5 \iff x^2 + 1 > \ln 5 \iff x^2 > \ln 5 - 1$, avec $\ln 5 - 1 \approx 0{,}61 > 0$. Donc

  $x < -\sqrt{\ln 5 - 1}$ ou $x > \sqrt{\ln 5 - 1}$, $\boxed{\mathcal{S} = \left]-\infty\,;-\sqrt{\ln 5-1}\right[\cup \left]\sqrt{\ln 5-1}\,;+\infty\right[}$.

Exercice 3

3 points

- **Fonction f.** Le dénominateur $1-x-x^2$ a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5 > 0$ et pour racines $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
  $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$; f est dérivable sur D_f (fonction rationnelle).
  Avec $u(x) = 1-2x-3x^2$, $u'(x) = -2-6x$, $v(x) = 1-x-x^2$, $v'(x) = -1-2x$:

  $$u'v - uv' = \left(6x^3+8x^2-4x-2\right) - \left(6x^3+7x^2-1\right) = x^2-4x-1, \qquad \boxed{f'(x) = \frac{x^2-4x-1}{(1-x-x^2)^2}}.$$

- **Fonction g.** $D_g = \mathbb{R}$, g dérivable sur $\mathbb{R}$. Produit $u\,\mathrm{e}^w$ avec $u(x) = 1-2x$, $w(x) = 1-2x$, $u' = w' = -2$:

  $$g'(x) = -2\,\mathrm{e}^{1-2x} + (1-2x)(-2)\,\mathrm{e}^{1-2x} = (-2-2+4x)\,\mathrm{e}^{1-2x}, \qquad \boxed{g'(x) = (4x-4)\,\mathrm{e}^{1-2x}}.$$

- **Fonction h.** $D_h = \mathbb{R}$, h dérivable sur $\mathbb{R}$. $h = v^5$ avec $v(x) = 1-\mathrm{e}^{-2x}$, $v'(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$; $(v^5)' = 5v'v^4$:

  $$\boxed{h'(x) = 10\,\mathrm{e}^{-2x}\left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)^4}.$$

- **Fonction i.** $i(x)$ existe si et seulement si $w(x) = \mathrm{e}^x + 18\mathrm{e}^{-x} - 9 \geqslant 0$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$:

  $$w(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^{2x} - 9\mathrm{e}^x + 18 \geqslant 0 \iff (\mathrm{e}^x - 3)(\mathrm{e}^x - 6) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \leqslant 3 \text{ ou } \mathrm{e}^x \geqslant 6.$$

  (Le trinôme $X^2 - 9X + 18$, de racines 3 et 6, est positif à l'extérieur des racines.) Donc

  $$\boxed{D_i =]-\infty ; \ln 3] \cup [\ln 6 ; +\infty[}, \qquad i \text{ dérivable sur }]-\infty ; \ln 3[\cup]\ln 6 ; +\infty[.$$

  Avec $(\sqrt{w})' = \dfrac{w'}{2\sqrt{w}}$ et $w'(x) = \mathrm{e}^x - 18\mathrm{e}^{-x}$:

  $$\boxed{i'(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 18\mathrm{e}^{-x}}{2\sqrt{\mathrm{e}^x + 18\mathrm{e}^{-x} - 9}}}.$$

Exercice 4

8 points

Partie A

1) $f'(x) = 0$ aux abscisses des points de $\mathscr{C}$ à tangente horizontale : $\boxed{x \approx -0{,}5 \text{ et } x \approx 0{,}5}$.

2) f est strictement croissante sur $]-\infty ; -0{,}5[$ et sur $]0{,}5 ; +\infty[$ environ :

$$\boxed{f'(x) > 0 \text{ pour } x \in]-\infty ; -0{,}5[\cup]0{,}5 ; +\infty[}.$$

3) Maximum local environ $1{,}6$, atteint en $x \approx -0{,}5$; minimum local environ $0{,}4$, atteint en $x \approx 0{,}5$.

Partie B

1) D passe par $K(-1\,;0)$ et $J(0\,;1)$: coefficient directeur $\dfrac{1-0}{0-(-1)} = 1$, ordonnée à l'origine 1.
$\boxed{D : y = x + 1}$.

2) **a.** $f(x) - (mx+p) = \varphi(x) \to 0$ en $\pm\infty$: la droite $y = mx + p$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $\pm\infty$, c'est donc D. D'où $\boxed{m = 1 \text{ et } p = 1}$.

b. $J(0\,;1)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}$: pour tout réel x, les points $M(x\,;f(x))$ et $M'(-x\,;f(-x))$ de $\mathscr{C}$ sont symétriques par rapport à J, donc J est le milieu de $[MM']$:

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 1, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{f(x)+f(-x) = 2}.$$

c. Pour tout réel x : $f(x)+f(-x) = (x+1+\varphi(x)) + (-x+1+\varphi(-x)) = 2 + \varphi(x) + \varphi(-x)$.
Avec b. : $\varphi(x)+\varphi(-x) = 0$, soit $\varphi(-x) = -\varphi(x)$: $\boxed{\varphi \text{ est impaire}}$.
En dérivant l'égalité $f(x) + f(-x) = 2$ (la dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$) : $f'(x) - f'(-x) = 0$, soit $f'(-x) = f'(x)$: $\boxed{f' \text{ est paire}}$.

3) On a $f(x) = 1 + x + (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

- $J(0\,;1) \in \mathscr{C}$: $f(0) = 1 + b = 1$, donc $b = 0$.
- $f'(x) = 1 + a\,\mathrm{e}^{-x^2} + (ax+b)(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2}$, donc $f'(0) = 1 + a$. Or $f'(0)$ est le coefficient directeur de T, soit $1 - \mathrm{e}$. Donc $1 + a = 1 - \mathrm{e}$, $a = -\mathrm{e}$.

Ainsi $\boxed{a = -\mathrm{e},\ b = 0}$ et $f(x) = 1 + x - \mathrm{e}\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}$, soit $\boxed{f(x) = 1 + x - x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}}$.

Partie C

1) Pour $x \geqslant 0$, on étudie le signe de $f(x) - \big((1-\mathrm{e})x + 1\big)$:

$$f(x) - \big((1-\mathrm{e})x+1\big) = x - x\,\mathrm{e}^{1-x^2} - x + \mathrm{e}x = \mathrm{e}x\left(1 - \mathrm{e}^{-x^2}\right).$$

Pour $x \geqslant 0$: $x \geqslant 0$ et $-x^2 \leqslant 0$ donc $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$. Le produit est positif ou nul :

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } T \text{ sur } [0\,;+\infty[}$$

avec un seul point commun, J (pour $x = 0$).

2) Par dérivation du produit $x\,\mathrm{e}^{1-x^2}$ (avec $(\mathrm{e}^w)' = w'\mathrm{e}^w$, $w(x) = 1 - x^2$) :

$$f'(x) = 1 - \left[1 \times \mathrm{e}^{1-x^2} + x \times (-2x)\,\mathrm{e}^{1-x^2}\right] = 1 - \mathrm{e}^{1-x^2} + 2x^2\,\mathrm{e}^{1-x^2},$$

soit $\boxed{f'(x) = 1 + \left(2x^2-1\right)\mathrm{e}^{-x^2+1}}$.

3) $f''(x) = 4x\,\mathrm{e}^{1-x^2} + \left(2x^2-1\right)(-2x)\,\mathrm{e}^{1-x^2} = \left(4x - 4x^3 + 2x\right)\mathrm{e}^{1-x^2} = \left(6x - 4x^3\right)\mathrm{e}^{1-x^2}$.
Comme $\mathrm{e}^{1-x^2} > 0$, $\boxed{f''(x) \text{ est du signe de } 6x - 4x^3}$.

4) Sur $[0\,;+\infty[$: $6x-4x^3=2x\left(3-2x^2\right)$ s'annule en 0 et en $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ($\approx 1{,}22$), positif entre les deux, négatif ensuite.
$f'(0)=1-\mathrm{e}\approx -1{,}72$; $f'\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=1+2\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\approx 2{,}21$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=1$.

x	0		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$	0	$+$	0	$-$	
f'	$1-\mathrm{e}$	↗	$1+2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	↘	1

5)
- Sur $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\,;+\infty\right[$, f' décroît vers 1, donc $f'(x)>1>0$: f' ne s'annule pas.
- Sur $\left[0\,;\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$, f' est continue et strictement croissante, $f'(0)<0<f'\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire de la bijection), f' s'annule une seule fois, en un réel α.

Donc $\boxed{f' \text{ s'annule une seule fois sur } [0\,;+\infty[}$, en α; $f'(x)<0$ sur $[0\,;\alpha[$ et $f'(x)>0$ sur $]\alpha\,;+\infty[$.
$f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

6) À la calculatrice : $f'(0{,}51)\approx -0{,}0055<0$ et $f'(0{,}52)\approx 0{,}0475>0$, donc $\boxed{0{,}51<\alpha<0{,}52}$.

7) $f'(\alpha)=0$ donne $\left(2\alpha^2-1\right)\mathrm{e}^{1-\alpha^2}=-1$. Comme $\alpha<0{,}52<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $1-2\alpha^2>0$ et $\mathrm{e}^{1-\alpha^2}=\dfrac{1}{1-2\alpha^2}$.
Alors

$$f(\alpha)=1+\alpha-\frac{\alpha}{1-2\alpha^2}=\frac{(1+\alpha)\left(1-2\alpha^2\right)-\alpha}{1-2\alpha^2},\qquad \boxed{f(\alpha)=\frac{1-2\alpha^2-2\alpha^3}{1-2\alpha^2}},$$

avec $P(x)=1-2x^2-2x^3$ et $Q(x)=1-2x^2$.
Sur $[0{,}51\,;0{,}52]$, P et Q sont strictement décroissantes ($P'(x)=-4x-6x^2<0$, $Q'(x)=-4x<0$) et strictement positives. Donc

$$0<P(0{,}52)<P(\alpha)<P(0{,}51)\qquad\text{et}\qquad 0<Q(0{,}52)<Q(\alpha)<Q(0{,}51),$$

d'où $\dfrac{P(0{,}52)}{Q(0{,}51)}<\dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}<\dfrac{P(0{,}51)}{Q(0{,}52)}$, avec $P(0{,}52)=0{,}177\,984$, $Q(0{,}51)=0{,}4798$, $P(0{,}51)=0{,}214\,498$, $Q(0{,}52)=0{,}4592$:

$$\boxed{0{,}37<f(\alpha)<0{,}47}.$$

Exercice 5

1 point

1) Sous l'hypothèse « $13\,\%$ de la population est infectée », on répète 500 fois, de façon indépendante (tirages assimilés à des tirages avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès « le patient est infecté » a pour probabilité $0{,}13$:

$$\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(500\,;\,0{,}13).}$$

On cherche a le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$. À la calculatrice :

$$P(X \leqslant 50) \approx 0{,}0239 \text{ et } P(X \leqslant 51) \approx 0{,}0332, \quad \text{donc } a = 51\,;$$
$$P(X \leqslant 79) \approx 0{,}9705 \text{ et } P(X \leqslant 80) \approx 0{,}978, \quad \text{donc } b = 80.$$

Alors $P(51 \leqslant X \leqslant 80) = P(X \leqslant 80) - P(X \leqslant 50) \approx 0{,}978 - 0{,}024 \approx 0{,}954 \geqslant 0{,}95$:

$$\boxed{I = [51\,;\,80]}$$

(en fréquences : entre $\dfrac{51}{500} = 0{,}102$ et $\dfrac{80}{500} = 0{,}16$).

2) La fréquence observée $0{,}08$ correspond à $0{,}08 \times 500 = 40$ patients infectés, et $40 \notin I$: la valeur observée est en dehors de l'intervalle dans lequel X tombe avec une probabilité d'au moins $0{,}95$ sous l'hypothèse. De plus, à la calculatrice, $P(X \leqslant 40) \approx 0{,}0003$: sous l'hypothèse, observer 40 malades ou moins est très peu probable.

La fréquence observée n'est pas compatible avec l'hypothèse des $13\,\%$: celle-ci est peu crédible.

La proportion de personnes infectées semble plus faible que $13\,\%$.