Calculatrice autorisée

La présentation et la rédaction devront être soignées.

Exercice 1

5,5 points

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Une diode est fabriquée en série. À la sortie de la ligne de production, la probabilité qu'une diode prise au hasard soit défectueuse est égale à $0{,}017$. Les diodes sont conditionnées par boîtes de 185 unités (le nombre de diodes produites étant très grand, on considérera que les choix successifs de diodes pour remplir une boîte sont indépendants les uns des autres).

1) Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de diodes défectueuses dans une boîte.

- **a.** Quelle loi suit X ?
- **b.** Calculer l'espérance de X et interpréter.
- **c.** Calculer l'écart-type de X.

2) Une boîte est prise au hasard après conditionnement. Déterminer la probabilité :

- **a.** qu'elle contienne exactement 4 diodes défectueuses. On utilisera de manière détaillée la formule du cours ;
- **b.** qu'elle ne contienne aucune diode défectueuse ;
- **c.** qu'elle contienne au plus 6 diodes défectueuses ;
- **d.** qu'elle contienne plus de 3 diodes défectueuses ;
- **e.** qu'elle contienne au moins 2 diodes défectueuses et qu'elle en contienne moins de 5 ;
- **f.** qu'elle contienne moins de 8 diodes défectueuses sachant qu'elle en contient au moins 4 ;
- **g.** qu'elle contienne plus de 5 diodes défectueuses sachant qu'elle en contient moins de 9.

3) Une boîte est dite « qualifiée » lorsqu'elle contient au plus quatre diodes défectueuses. Un carton contient 10 boîtes. Quelle est la probabilité qu'un carton pris au hasard contienne au moins 9 boîtes qualifiées ?

Exercice 2

2,5 points

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier : $A = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{3}-2}\right)^5 \mathrm{e}^{1-2x}}{\mathrm{e}^{1-\frac{2x}{3}}}$.

2) Montrer que pour tout nombre réel x on a : $\mathrm{e}^x - 2 + \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{(\mathrm{e}^x - 1)^2}{\mathrm{e}^x}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{\mathrm{e}^{1-2x}} = \mathrm{e}^{2-3x}$; $\mathrm{e}^{2x-1} = 4$; $\mathrm{e}^{x^2+1} > 5$.

Exercice 3

3 points

Pour chacune des fonctions suivantes :

- déterminer son ensemble de définition ;
- donner sans justifier son ensemble de dérivabilité ;
- calculer sa dérivée.

$f : x \mapsto \dfrac{1-2x-3x^2}{1-x-x^2}$ $\qquad$ $g : x \mapsto (1-2x)\,\mathrm{e}^{1-2x}$

$h : x \mapsto \left(1-\mathrm{e}^{-2x}\right)^5$ $\qquad$ $i : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x + 18\mathrm{e}^{-x} - 9}$

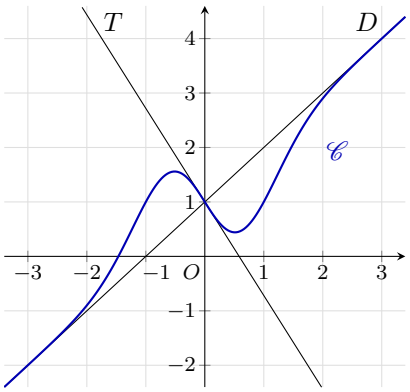
Exercice 4

8 points

f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sur le graphique ci-contre sont représentées :

- la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f ;
- la droite D, asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
  Elle passe par les points $K(-1\,;0)$ et $J(0\,;1)$;
- la tangente T à $\mathscr{C}$ au point $J(0\,;1)$.
  Son équation réduite est $y = (1-\mathrm{e})x + 1$.

On sait de plus que $\mathscr{C}$ admet $J(0\,;1)$ pour centre de symétrie.



Partie A : quelques lectures graphiques

Déterminer, avec la précision permise par le graphique :

1) les solutions de l'équation $f'(x) = 0$;

2) les solutions de l'inéquation $f'(x) > 0$;

3) les extremums locaux de f.

Partie B : expression de f

1) Déterminer une équation de D.

2) On suppose qu'il existe des réels m et p et une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ tels que, pour tout réel x, $f(x) = mx + p + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0$.

- **a.** Déterminer m et p.
- **b.** Démontrer que pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 2$.
- **c.** En déduire que la fonction φ est impaire, puis que f' est paire.

3) On suppose maintenant que pour tout réel x, $\varphi(x) = (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels. Démontrer que $a = -\mathrm{e}$ et $b = 0$. En déduire que pour tout réel x, $f(x) = 1 + x - x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

Partie C : étude de $f : x \mapsto 1 + x - x\,\mathrm{e}^{-x^2+1}$ sur $[0\,;+\infty[$

1) Étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

2) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = 1 + \left(2x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-x^2+1}$.

3) f'' désigne la fonction dérivée de f'. Montrer que $f''(x)$ est du signe de $6x - 4x^3$.

4) En déduire le tableau de variation de f' sur $[0\,;+\infty[$ (la limite de f' en $+\infty$ sera donnée sans justification).

5) En vous appuyant sur le tableau précédent, expliquer pourquoi f' ne s'annule qu'une seule fois sur $[0\,;+\infty[$.
En déduire le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$ (la limite de f en $+\infty$ y sera indiquée sans justification).

6) On note α la solution positive de l'équation $f'(x) = 0$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

7) Écrire $f(\alpha)$ sous la forme $\dfrac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$ où P et Q sont deux polynômes.
En déduire, à l'aide de la question 6), un encadrement de $f(\alpha)$.

Exercice 5

1 point

Lors d'une épidémie de grippe, on émet l'hypothèse que $13\,\%$ d'une population est infectée. Un échantillon de 500 patients est constitué aléatoirement dans cette population (tirages assimilés à des tirages avec remise). On note X le nombre de patients infectés dans l'échantillon.

1) On se place sous cette hypothèse. Donner la loi de X, puis déterminer à l'aide de la calculatrice un intervalle $I = [a\,;\,b]$, où a et b sont des entiers, tel que $P(X \in I) \geqslant 0{,}95$.
On pourra prendre pour a le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$ et pour b le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

2) Un médecin constate qu'après analyse, seuls $8\,\%$ de ces 500 patients sont effectivement infectés. Cette fréquence observée est-elle compatible avec l'hypothèse ? Justifier.