Exercice 1

2 points

1) $f = 3\mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $u'(x) = \mathrm{e}^{x}$. Comme $(\mathrm{e}^{u})' = u'\,\mathrm{e}^{u}$:

$$\boxed{f'(x) = 3\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x}}}.$$

2) $g(x) = \left(1 - 5x^2\right)^{-3}$ est de la forme v^{-3} avec $v(x) = 1 - 5x^2$ et $v'(x) = -10x$.
Comme $(v^n)' = n\,v'\,v^{n-1}$ pour tout entier relatif n :

$$g'(x) = -3 \times (-10x) \times \left(1 - 5x^2\right)^{-4}, \qquad \text{soit} \qquad \boxed{g'(x) = \frac{30x}{(1 - 5x^2)^4}}.$$

Exercice 2

4 points

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\sqrt{n}\right) = -\infty$; et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1000}{n} = 0$.
Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

2) Forme indéterminée « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » : on factorise par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur. Pour $n \geqslant 2$:

$$v_n = \frac{n\left(3 - \dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{3 - \dfrac{1}{n}}{2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{3}{n^2}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{3}{n^2}\right) = 2$, donc le quotient tend vers $\dfrac{3}{2}$; et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
Par produit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$.

3) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$, donc, en divisant par $n > 0$:

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos(n)}{n} = 0$.
Par somme : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -1}$.

Exercice 3

7 points

Partie A

1) $u_1 = 0{,}93 \times u_0 = 0{,}93 \times 6 = 5{,}58$.
Au 1er janvier 2026, la population du milieu A est de $\boxed{5\,580 \text{ individus}}$.

2) (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $q = 0{,}93$, donc pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_n = 6 \times 0{,}93^n}.$$

3) Comme $-1 < 0{,}93 < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}93^n = 0$, donc par produit par 6 : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.
Interprétation : selon ce modèle, la population du milieu A tend à disparaître au fil des années.

Partie B

1) $v_1 = -0{,}05 \times 6^2 + 1{,}1 \times 6 = -1{,}8 + 6{,}6 = 4{,}8$.
Au 1er janvier 2026, la population du milieu B est de $\boxed{4\,800 \text{ individus}}$.

2) f est une fonction polynôme, dérivable sur $[0\,;+\infty[$, et $f'(x) = -0{,}1x + 1{,}1$.

$$f'(x) \geqslant 0 \iff -0{,}1x \geqslant -1{,}1 \iff x \leqslant 11 \quad \text{(on divise par } -0{,}1 < 0\text{)}.$$

Donc $f'(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;11]$: $\boxed{f \text{ est croissante sur } [0\,;11]}$.

3) Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$: « $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$ ». On remarque que $v_{n+1} = f(v_n)$.
Initialisation ($n = 0$) : $v_0 = 6$ et $v_1 = 4{,}8$, donc $2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 \leqslant 6$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité : soit k un entier naturel tel que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $2 \leqslant v_{k+1} \leqslant v_k \leqslant 6$.
Les nombres 2, v_{k+1}, v_k et 6 appartiennent à $[0\,;11]$, où f est croissante ; appliquer f conserve donc l'ordre :

$$f(2) \leqslant f(v_{k+1}) \leqslant f(v_k) \leqslant f(6).$$

Or $f(2) = -0{,}05 \times 4 + 1{,}1 \times 2 = 2$, $f(v_{k+1}) = v_{k+2}$, $f(v_k) = v_{k+1}$ et $f(6) = 4{,}8 \leqslant 6$. D'où

$$2 \leqslant v_{k+2} \leqslant v_{k+1} \leqslant 6 : P(k+1) \text{ est vraie.}$$

Conclusion : $P(0)$ est vraie et la propriété est héréditaire ; par récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \quad 2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6}.$$

4) D'après la question précédente, pour tout n, $v_{n+1} \leqslant v_n$: la suite (v_n) est **décroissante** ; et $v_n \geqslant 2$: elle est **minorée** par 2.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{(v_n) \text{ converge vers une limite } \ell}$, avec de plus $2 \leqslant \ell \leqslant 6$ (passage à la limite dans $2 \leqslant v_n \leqslant 6$).

5) **a.** On résout $f(\ell) = \ell$:

$$-0{,}05\ell^2 + 1{,}1\ell = \ell \iff -0{,}05\ell^2 + 0{,}1\ell = 0 \iff -0{,}05\,\ell\,(\ell - 2) = 0 \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 2.$$

Comme $\ell \geqslant 2$, on obtient $\boxed{\ell = 2}$.

b. Selon ce modèle, la population du milieu B diminue et se stabilise à long terme autour de $2\,000$ individus.

Exercice 4

3 points

1) La boucle augmente n de 1 **tant que** $\dfrac{1}{n^3} \geqslant 10^{-2} = 0{,}01$; elle s'arrête dès que $\dfrac{1}{n^3} < 0{,}01$, et la fonction renvoie alors n (et non $\dfrac{1}{n^3}$).
Vérification : $\dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64} \approx 0{,}0156 \geqslant 0{,}01$ et $\dfrac{1}{5^3} = \dfrac{1}{125} = 0{,}008 < 0{,}01$, donc `seuil(2)` renvoie 5.
Réponse : **c.** la plus petite valeur de n telle que $\dfrac{1}{n^3} < 0{,}01$.

2) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $(-1)^n \geqslant -1$, donc $u_n \geqslant \sqrt{n} - 1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} - 1\right) = +\infty$; par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Réponse : **b.** la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Exercice 5

4 points

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $P(n)$: « $S_n = \dfrac{1}{3}\,n\,(2n+1)(2n-1)$ ».

Initialisation ($n = 1$) : $S_1 = 1^2 = 1$ et $\dfrac{1}{3} \times 1 \times 3 \times 1 = 1$. $P(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $k \geqslant 1$ un entier tel que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $S_k = \dfrac{1}{3}\,k\,(2k+1)(2k-1)$.

Montrons que $S_{k+1} = \dfrac{1}{3}\,(k+1)(2k+3)(2k+1)$.

Le terme suivant $(2k-1)^2$ dans la somme est $\big(2(k+1)-1\big)^2 = (2k+1)^2$, donc

$$\begin{aligned} S_{k+1} = S_k + (2k+1)^2 &= \frac{1}{3}\,k\,(2k+1)(2k-1) + (2k+1)^2 && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{3}\,(2k+1)\big[k(2k-1) + 3(2k+1)\big] && \text{(on factorise par } \tfrac{1}{3}(2k+1)\text{)} \\ &= \frac{1}{3}\,(2k+1)\left(2k^2+5k+3\right). \end{aligned}$$

Or $(k+1)(2k+3) = 2k^2 + 3k + 2k + 3 = 2k^2 + 5k + 3$. Donc

$$S_{k+1} = \frac{1}{3}\,(k+1)(2k+3)(2k+1) = \frac{1}{3}\,(k+1)\big(2(k+1)+1\big)\big(2(k+1)-1\big)$$: $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(1)$ est vraie et la propriété est héréditaire ; par récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \quad S_n = \frac{1}{3}\,n\,(2n+1)(2n-1).}$$