Calculatrice autorisée (mode examen)
Toutes les réponses doivent être justifiées et clairement rédigées.

Exercice 1

2 points

Pour chacune des fonctions suivantes, donner l'expression de sa fonction dérivée (les ensembles de définition et de dérivabilité ne sont pas demandés).

1) $f(x) = 3\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$

2) $g(x) = \dfrac{1}{(1-5x^2)^3}$

Exercice 2

4 points

Calculer les limites des suites suivantes, en détaillant soigneusement les calculs.

1) $u_n = -\sqrt{n} + \dfrac{1000}{n}$

2) $v_n = \dfrac{3n-1}{2n^2-5n+3}$

3) $w_n = \dfrac{\cos(n)}{n} - 1$

Exercice 3

7 points

On se propose de comparer l'évolution d'une population animale dans deux milieux distincts A et B.
Au 1er janvier 2025, on introduit $6\,000$ individus dans chacun des milieux A et B.

Partie A

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu A.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 6$ et de raison $0{,}93$.
Pour tout entier naturel n, u_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en milliers d'individus.

1) Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

2) Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on étudie l'évolution de la population dans le milieu B.
On suppose que dans ce milieu, l'évolution de la population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad v_{n+1} = -0{,}05\, v_n^2 + 1{,}1\, v_n.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025 + n$, exprimée en milliers d'individus.

1) Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

2) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;11]$.

3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

4) En déduire que la suite (v_n) est convergente vers une limite ℓ.

5) **a.** En admettant que la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ (en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$), déterminer la valeur de ℓ.

b. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4

3 points

QCM : pour chaque question, une **seule** bonne réponse est possible.
Recopier sur votre copie le numéro de la question ainsi que **la lettre** correspondant à la réponse choisie, puis justifier.

1) On considère la fonction Python suivante :

```
def seuil(p):
    n = 1
    while 1/n**3 >= 10**(-p):
        n = n + 1
    return n
```

Si l'on saisit dans la console `seuil(2)`, on obtient :

a. la plus petite valeur de $1/n^3$ telle que $\frac{1}{n^3} < 0{,}01$;

b. la plus petite valeur de $1/n^3$ telle que $\frac{1}{n^3} \geqslant 0{,}01$;

c. la plus petite valeur de n telle que $\frac{1}{n^3} < 0{,}01$;

d. la plus petite valeur de n telle que $\frac{1}{n^3} \geqslant 0{,}01$.

2) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = (-1)^n + \sqrt{n}$.

a. La suite (u_n) n'a pas de limite.

b. La suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

c. La suite (u_n) a pour limite 0.

d. La suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

Exercice 5

4 points

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $S_n = \dfrac{1}{3}\,n\,(2n+1)(2n-1)$.