Exercice 1

2,5 points

1) Pour $n \geqslant 1$, on factorise par le terme de plus haut degré :

$$\frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{n^2\left(3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(6+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{4}{n}+\frac{7}{n^2}}{6+\frac{1}{n^2}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
La suite constante égale à $\frac{1}{2}$ a pour limite $\frac{1}{2}$. Les deux suites qui encadrent (u_n) ont la même limite $\frac{1}{2}$: d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.
L'affirmation 1 est vraie.

2) La fonction h est convexe sur $[-1\,;\,3]$ si et seulement si sa dérivée h' est croissante sur $[-1\,;\,3]$.
Or, d'après le graphique, h' est croissante sur $[-1\,;\,a]$ avec $a \approx 0{,}6$, puis décroissante sur $[a\,;\,3]$: par exemple $h'(1) \approx 5$ et $h'(2) \approx 2$, donc $h'(2) < h'(1)$ alors que $1 < 2$.
h' n'est pas croissante sur $[-1\,;\,3]$, donc h n'est pas convexe sur cet intervalle (elle est concave sur $[a\,;\,3]$).
L'affirmation 2 est fausse.

Exercice 2

4,5 points

1) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$.
D'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

b. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on divise l'encadrement par $n > 0$:

$$2n \leqslant u_n \leqslant 2n+3 \iff 2 \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant 2+\frac{3}{n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2+\frac{3}{n}\right) = 2$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 2.$$

2) **a.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) = \frac{1}{2}u_n + n + 2 - 2n - 2 \\ &= \frac{1}{2}u_n - n = \frac{1}{2}(u_n - 2n) = \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 3$.

b. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $u_n = v_n + 2n$:

$$\boxed{u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n}.$$

c. Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$.
Par somme, on retrouve $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

Exercice 3

5 points

1) f est une fonction rationnelle définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$ (car $x+3>0$). Avec $u(x)=2x+2$ et $v(x)=x+3$:

$$f'(x) = \frac{2(x+3)-(2x+2)\times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x-2}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}.$$

Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$: la fonction f est $\boxed{\text{strictement croissante sur } [0\,;+\infty[}$.

2) Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ ».

Initialisation. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{2\times\frac{1}{2}+2}{\frac{1}{2}+3} = \frac{3}{\frac{7}{2}} = \frac{6}{7}$. On a bien $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{6}{7} \leqslant 1$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit k un entier naturel tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Les nombres 0, u_k, u_{k+1} et 1 sont dans $[0\,;+\infty[$, où f est croissante, donc

$$\begin{aligned} 0 \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 1 &\implies f(0) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(1) && (f \text{ croissante sur } [0\,;+\infty[) \\ &\iff \frac{2}{3} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1 && \left(f(0)=\tfrac{2}{3},\ f(1)=\tfrac{4}{4}=1\right) \\ &\implies 0 \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 1. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$.

a. D'après ce qui précède, la suite (u_n) est croissante ($u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 1.
D'après le théorème de convergence monotone, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}}$.

b. Pour $x \geqslant 0$ (donc $x+3 \neq 0$) :

$$f(x) = x \iff \frac{2x+2}{x+3} = x \iff 2x+2 = x^2+3x \iff x^2+x-2=0.$$

$\Delta = 1^2 - 4\times 1\times(-2) = 9$, d'où $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.
Pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc par passage à la limite $0 \leqslant \ell \leqslant 1$: la valeur -2 est exclue.
Ainsi $\boxed{\ell = 1}$.

3) **a.** La suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier k, $u_k \geqslant u_0 = \dfrac{1}{2}$. En additionnant ces $n+1$ inégalités (pour $k = 0, 1, \ldots, n$) :

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \geqslant \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n+1 \text{ termes}}, \quad \text{soit} \quad \boxed{S_n \geqslant \frac{n+1}{2}}.$$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$. D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$.

Exercice 4

4 points

Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$: $A(0\,;\,0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,1\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $E(0\,;\,0\,;\,1)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $H(0\,;\,1\,;\,1)$.

1) I milieu de $[EF]$: $I\left(\dfrac{0+1}{2}\,;\,\dfrac{0+0}{2}\,;\,\dfrac{1+1}{2}\right)$, soit $\boxed{I\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)}$.

J milieu de $[BC]$: $\boxed{J\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)}$. K milieu de $[AE]$: $\boxed{K\left(0\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)}$.

2) **a.** $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix}0-0\\1-0\\1-\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

S'il existait un réel k tel que $\overrightarrow{KH} = k\,\overrightarrow{AI}$, la première coordonnée donnerait $0 = \dfrac{k}{2}$, donc $k = 0$, et la deuxième $1 = 0 \times k = 0$: impossible.
Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KH}$ ne sont pas colinéaires, donc :

$$\boxed{\text{les droites } (AI) \text{ et } (KH) \text{ ne sont pas parallèles.}}$$

b. Supposons qu'il existe un point $M(x\,;\,y\,;\,z)$ commun aux deux droites. Il existe alors des réels t et s tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KM} = s\,\overrightarrow{KH}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \end{cases}$$

On obtient $\dfrac{1}{2}t = 0$, donc $t = 0$; $s = 0$; puis $z = t = 0$ et $z = \dfrac{1}{2} + 0 = \dfrac{1}{2}$: contradiction.
Les droites (AI) et (KH) $\boxed{\text{ne sont pas sécantes}}$. Comme elles ne sont pas parallèles non plus, elles sont non coplanaires.

3) **a.** $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}-0\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

On cherche a et b tels que $\overrightarrow{IJ} = a\,\overrightarrow{AC} + b\,\overrightarrow{AE}$: $\frac{1}{2} = a$, $\frac{1}{2} = a$ et $-1 = b$, d'où $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}$:

$$\boxed{\text{les vecteurs } \overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{AE} \text{ sont coplanaires.}}$$

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$, non colinéaires, dirigent le plan (ACE), et le vecteur directeur $\overrightarrow{IJ}$ de la droite (IJ) en est une combinaison linéaire.
Donc $\boxed{\text{la droite } (IJ) \text{ est parallèle au plan } (ACE)}$.
De plus $I \notin (ACE)$ ($\overrightarrow{AI} = a\,\overrightarrow{AC} + b\,\overrightarrow{AE}$ imposerait $a = \frac{1}{2}$ et $a = 0$) : le parallélisme est strict.

Exercice 5

4 points

1) a. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x$, $u'(x) = \mathrm{e}^x$, $v(x) = x - 1$, $v'(x) = 1$. Pour tout $x < 1$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1) - \mathrm{e}^x \times 1}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}}.$$

b. Pour tout $x < 1$: $\mathrm{e}^x > 0$, $(x-1)^2 > 0$ et $x - 2 < -1 < 0$. Donc $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,1[$.
Limites : en $-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1) = -\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
En 1^-, $\lim\limits_{x\to1} \mathrm{e}^x = \mathrm{e} > 0$ et $\lim\limits_{x\to1^-} (x-1) = 0^-$, donc $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$.

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	
f	0	↘	$-\infty$

2) a. Pour tout $x < 1$: $\mathrm{e}^x > 0$; le trinôme $x^2 - 4x + 5$ a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$, il est donc du signe de son coefficient $a = 1$, strictement positif; enfin $x - 1 < 0$, donc $(x-1)^3 < 0$.
Ainsi $f''(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,1[$: la fonction f est $\boxed{\text{concave sur }]-\infty\,;\,1[}$.

b. $f(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0}{0-1} = -1$ et $f'(0) = \dfrac{(0-2)\mathrm{e}^0}{(0-1)^2} = -2$. La tangente T a pour équation $y = f'(0)\,x + f(0)$, soit

$$\boxed{T : y = -2x - 1}.$$

c. La fonction f est concave sur $]-\infty\,;\,1[$, donc sa courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de chacune de ses tangentes, en particulier de T. Pour tout $x < 1$:

$$f(x) \leqslant -2x - 1 \iff \frac{\mathrm{e}^x}{x-1} \leqslant -2x - 1 \iff \mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1) \quad \text{(car } x - 1 < 0\text{)}.$$

Donc, pour tout réel x de $]-\infty\,;\,1[$, $\boxed{\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)}$.