Calculatrice interdite

Exercice 1

2,5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis justifier. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

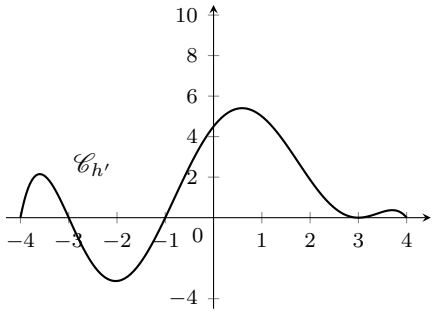
1) On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}.$$

Affirmation 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

2) Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;\,4]$. La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-contre.

Affirmation 2 : La fonction h est convexe sur $[-1\,;\,3]$.



Exercice 2

4,5 points

Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 3$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n + 2$.

1) On admet sans démonstration que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2n \leqslant u_n \leqslant 2n+3$.

a. Justifier précisément que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

b. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 2$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 2n$.

a. Établir que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et préciser v_0.

b. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n$.

c. Utiliser cette expression pour retrouver la limite de (u_n).

Exercice 3

5 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2u_n+2}{u_n+3}$.

On note f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$. On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Étudier les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

- **a.** En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- **b.** On appelle ℓ la limite de (u_n). On admet que ℓ est solution de l'équation $f(\ell) = \ell$. Déterminer ℓ.

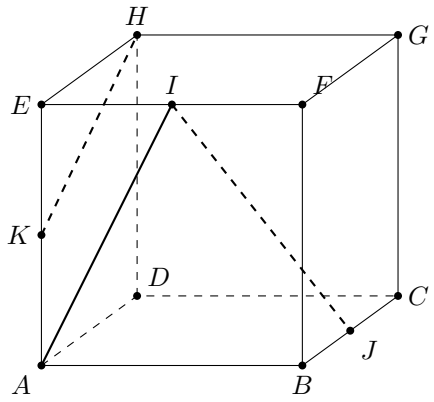
3) Pour tout entier naturel n, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

- **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $S_n \geqslant \dfrac{n+1}{2}$.
- **b.** En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 4

4 points

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.
On se place dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) Donner les coordonnées de chacun des points I, J et K.

2)
- **a.** Montrer que les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
- **b.** Les droites (AI) et (KH) sont-elles sécantes ?

3)
- **a.** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont coplanaires.
- **b.** Que peut-on en déduire pour la droite (IJ) et le plan (ACE) ?

Exercice 5

4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}$. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$. On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1)
- **a.** Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a $f'(x) = \dfrac{(x-2)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}$.
- **b.** Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.

2) On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a $f''(x) = \dfrac{\left(x^2-4x+5\right)\mathrm{e}^x}{(x-1)^3}$.

- **a.** Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$.
- **b.** Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
- **c.** En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\,;\,1[$, on a : $\mathrm{e}^x \geqslant (-2x-1)(x-1)$.